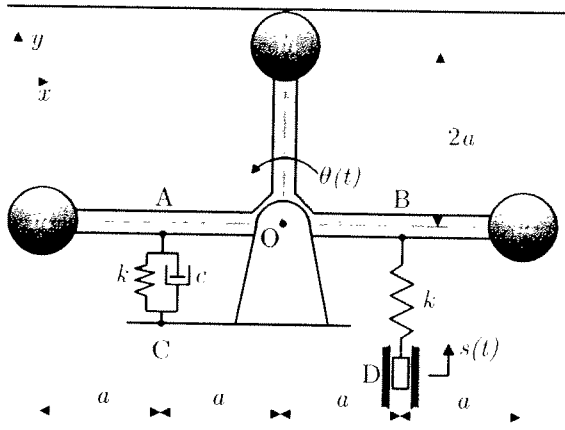


1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida em forma de T articulada no ponto **O** e com uma massa concentrada m em cada uma das extremidades. A massa da barra é desprezável em face das massas concentradas. No ponto **A**, estão ligadas à barra uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante de amortecimento c. No ponto **B**, está ligada à barra uma mola de rigidez k. A outra extremidade desta última mola está submetida a um deslocamento $s(t)$ na vertical. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, as molas não estão deformadas. Se, com $s(t) = 0$, for aplicada ao sistema uma perturbação inicial tal que $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ rad/s, o sistema responde conforme se representa na figura abaixo.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, admitir que a equação de movimento é,
$0.015\ddot{\theta}(t) + 0.0025c\dot{\theta}(t) + (0.005k - 0.4905)\theta(t) = 0.05ks(t)$.

Determinar,

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

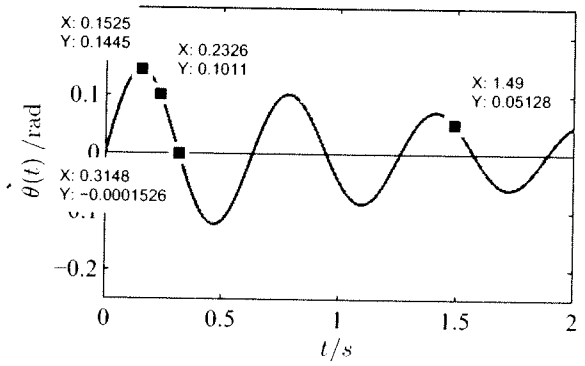
c) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k das molas;

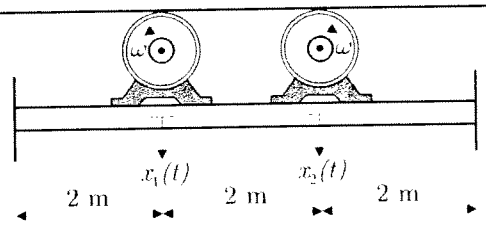
e) (10%) a constante de amortecimento c;

f) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor quando, após aplicação da perturbação inicial descrita acima, o sistema regressa ao estado de repouso.

g) (20%) Para $a = 0.05$ m e $s(t) = 5 \times 10^{-3}\cos(\omega t)$ m, considerando apenas o regime estacionário, determinar a(s) frequência(s) de excitação de modo que a amplitude do deslocamento de cada uma das massas seja igual a 0.01 m e que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ seja superior a $\pi / 2$.



Resposta livre ou natural



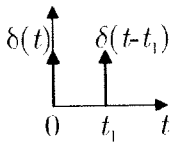
2) (4 val.) Uma máquina de 350 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

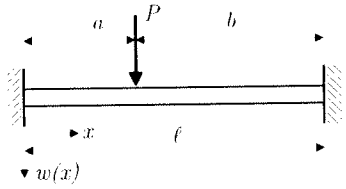
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

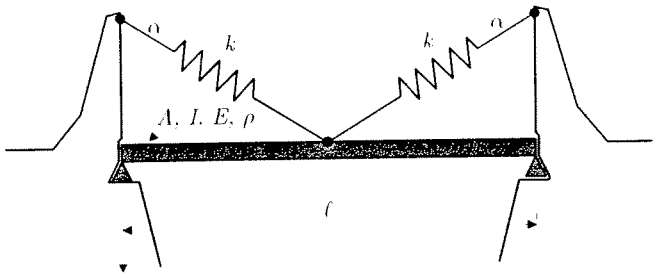
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t = 0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$





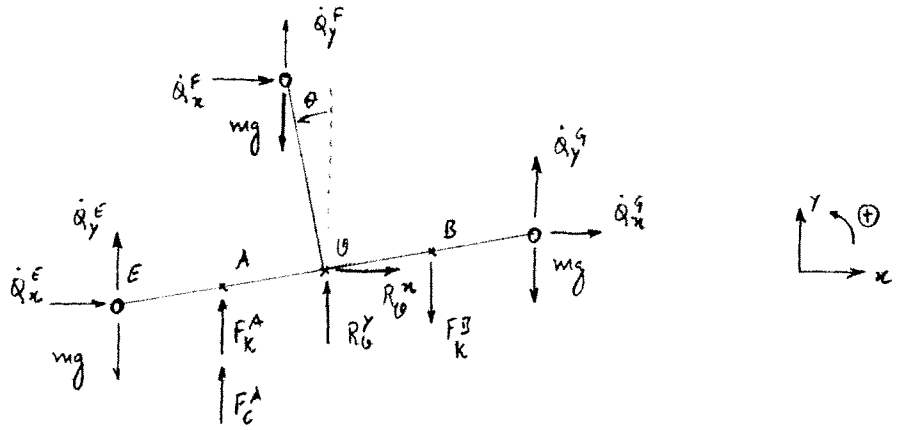
3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Exame de Recurso de 2008-07-11 — Estudo para fim do curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Quando perturba-se o sistema, temos:



No ponto A:

$$\vec{\vartheta_A} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{\vartheta_A} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_A} = \dot{\vec{\vartheta_A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^A} = -c \times \vec{v_A} = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -K \times \Delta\vec{\vartheta_A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{\vartheta_B} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{\vartheta_B} = \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^B} = -K \times \Delta\vec{\vartheta_B} = -K \left[\begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right.$$

No ponto E:

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_E = \dot{\vec{v}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_E = \dot{\vec{v}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_E = m \times \vec{a}_E = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto F:

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \dot{\vec{v}}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_F = \dot{\vec{v}}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_F = m \times \vec{a}_F = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto G:

$$\vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{v}}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_G = m \times \vec{a}_G = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_{O_{Total}} = \vec{K}_{O_E} + \vec{K}_{O_F} + \vec{K}_{O_G}$$

$$\vec{K}_{O_E} = \cancel{\vec{K}_E} + \vec{OE} \times \vec{Q}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_{O_F} = \cancel{\vec{K}_F} + \vec{OF} \times \vec{Q}_F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_{O_G} = \cancel{\vec{K}_G} + \vec{OG} \times \vec{Q}_G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

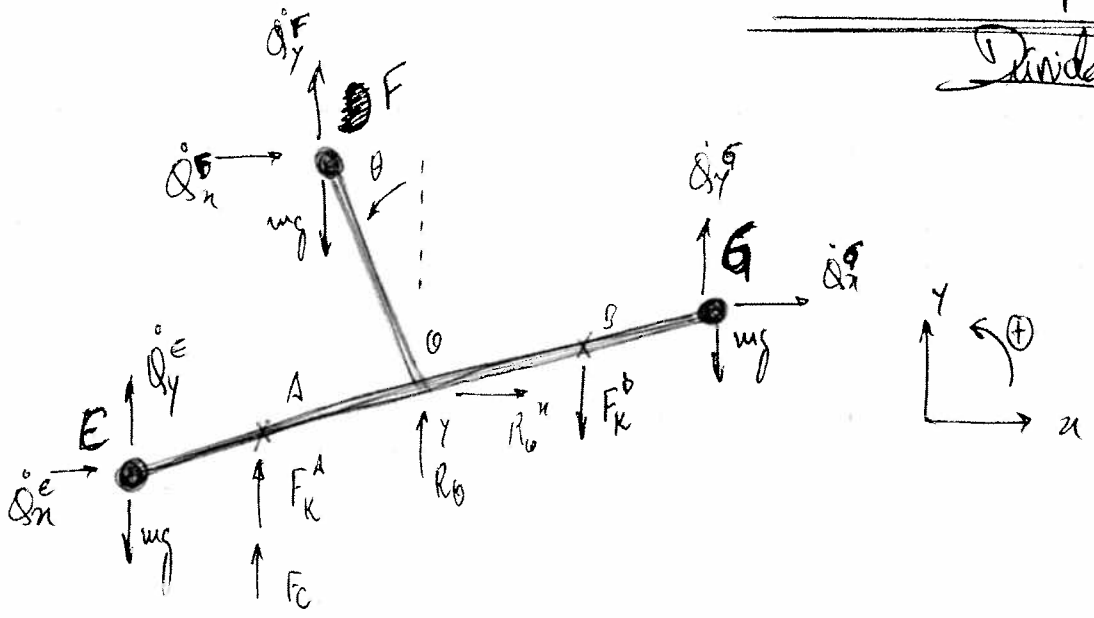
$$\vec{K}_{O_{Total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

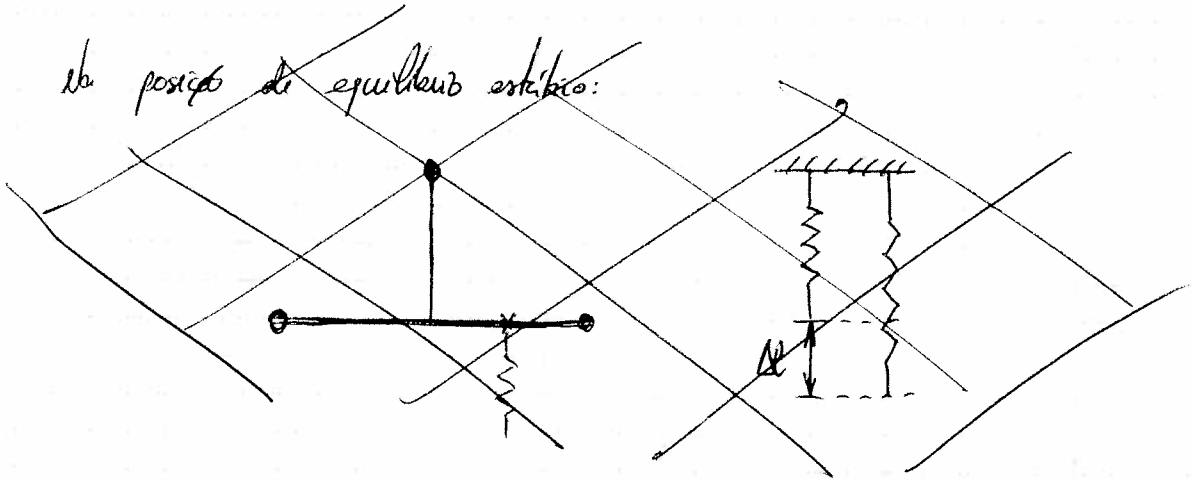
$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \quad (=)$$

$$(=) \quad \vec{OA} \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}_c^A \right)$$

Dinâmica



Na posição de equilíbrio estático:



No ponto A:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando} : \quad \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_A} = \dot{\vec{OA}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^A} = -c \times \vec{v_A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -K \times \Delta\vec{OA} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = -K \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -k\left[\begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ s \\ 0 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto C:

$$\vec{OE} = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}}^E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^E = \vec{K}_E + \vec{OE} \times \dot{\vec{Q}}^E = \quad (\vec{K}_E = 0,\ \text{pk massa concentrada})$$

$$= \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

No ponto G ≠ H → resultado

$$\dot{\vec{Q}}^G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{OG} = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{a}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^G = \vec{K}_G^{\,0} + \vec{OG} \times \dot{\vec{Q}}^G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4am\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

No ponto F:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}}_F = \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4ma^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_{O\_\_} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \_\_ \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\sum \vec{M}_O = \vec{K}_O \rightarrow \vec{OA} \times \{F_K^A + F_C^A\}$$

$$\vec{OA} \times \vec{F}_K^A + \vec{OA} \times \vec{F}_C^A + \vec{OB} \times \vec{F}_K^B + \vec{OE} \times m\vec{g} + \vec{OF} \times m\vec{g} + \vec{OG} \times m\vec{g} = \vec{K}_O \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 2a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12a^2 m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -a(ka\theta + ca\dot{\theta}) - ak(a\theta - s) + 2amg + 2amg = 12a^2 m\ddot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow -ka^2\theta - ca^2\dot{\theta} - ka^2\theta + aks + 2a\theta mg = 12a^2 m\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + k(2a^2\theta - as(t)) + 2a\theta mg = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + \theta[2ka^2 - 2amg] = aks(t)$$

Eq. movimento:

$$0.015\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}0025\,c\,\dot{\theta}(t) + (0{,}005k - 0{,}4905)\,\theta(t) = 0{,}05k\,s(t)$$

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\quad}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{0{,}1011}{0{,}05126} = 0{,}3394 \qquad \zeta = \frac{0{,}3394}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}3394^2}} = 0{,}05394$$

$T_d = 0{,}3148 \times 2 =$

$=$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{\left(1{,}49 - \frac{0{,}2326}{2}\right)} = 9{,}9939$$

$$9{,}9939 = \omega_n \sqrt{1 - 0{,}05394^2} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 10{,}0084}$$

$T_d =$

$$T_d = \frac{n_2 - n_1}{N} \Rightarrow n_2 - n_1 = T_d \times N$$

$1{,}9978$

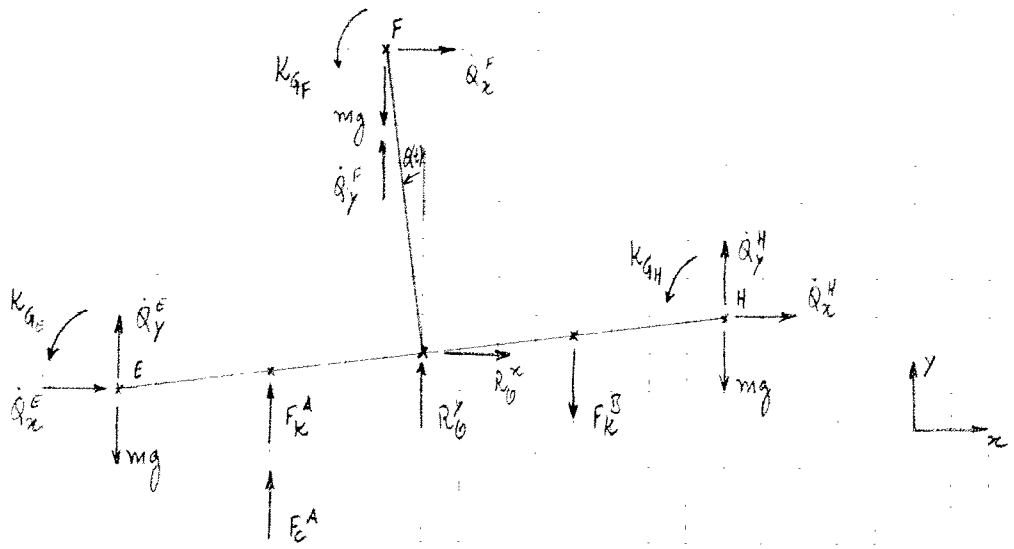
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow 10{,}0084 = \sqrt{\frac{0{,}005K - 9{,}9905}{0{,}015}} \Rightarrow K = 398{,}160 \ N/m$$

$$\xi = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \Rightarrow 0{,}05394 = \frac{0{,}0025C}{2 \times 0{,}015 \times 10{,}0084} = 6{,}4780 \ Ns/m$$

f) $E_c = 0 \ \wedge \ E_p = 0 \Leftarrow$

Exame Recurso de 2008-07-11
Parte Prática
Exercício 1

a) · Diagrama de corpo livre:



· No ponto E, temos:

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^E = m \times \vec{a}_E = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^E = \cancel{\vec{K}_{G_E}^E} + \vec{v}_E \times \vec{Q}^E =$$

= 0, porque é uma massa concentrada

$$= \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto H, temos:

$$\vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{a}_H = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^H = m \times \vec{a}_H = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^H = \cancel{\vec{K}_{G_H}} + \vec{OH} \times \vec{Q}^H =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto F, temos:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^F = m \times \vec{a}_F = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^F = \cancel{\vec{K}_{G_F}} + \vec{OF} \times \vec{Q}^F =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto A, temos:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_k^A = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^A = -c \times \vec{v}_C = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto E, temos:

$$\vec{OE} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OE} = \begin{Bmatrix} x \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_k^E = -k \times \Delta\vec{OE} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} x \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ -s \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

· Equação do movimento:

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{K}_{/O} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times (\vec{F}_k^A + \vec{F}_C^A) + \vec{OB} \times \vec{F}_k^B + \vec{OE} \times m\vec{g} + \vec{OH} \times m\vec{g} + \vec{OF} \times m\vec{g} = \vec{K}_{/O}^{sist.}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s(t)) \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \times 4a^2 m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=) \quad -Ka^2\theta - ca^2\dot{\theta} - Ka(a\theta - s(t)) + \cancel{2amg} - \cancel{2amg} + 2a\theta mg =$$

$$= 12a^2 m\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + Ka^2\theta + Ka^2\theta - 2a\theta mg = Kas(t)$$

Então:

$$12a^2 m\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + \left[2Ka^2 - 2amg\right]\theta(t) = Kas(t)$$

b) · Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}}$$

Como não sabemos as constantes c e K, então temos que encontrar outro caminho.

· Decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)}$$

· Período natural amortecido:

$T_d = 2 \times 0.3148 = 0,6296$ s ! pelo gráfico do enunciado

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0.6296} = 9,97965 \text{ rad/s}$$

Da figura, vê-se que os pontos 2 e 4 são homólogos, então reformando:

$$1,49 - 0,2326 = N \times T \quad \therefore \quad 1,49 - 0,2326 = N \times 0,6296 \quad (*)$$

(*) $N = 1,9971$, que é aproximadamente 2.

Voltando ao decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{2} \times \ln \left(\frac{0.1011}{0,05128} \right) = 0,339405$$

Então:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0.339405}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0.339405^2}} = 0,05394$$

c) · Frequência angular natural não amortecida:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{9.97965}{\sqrt{1 - 0,05394^2}} = 9,9942 \text{ rad/s}$$

d) A constante de rigidez K das molas:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 9,9942 = \sqrt{\frac{0,005\,K - 0,4905}{0,015}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = 397,7521 \ N/m$$

e) A constante de amortecimento é:

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n}$$

$$\therefore 0,05394 = \frac{0,0025 \times c}{2 \times 0,015 \times 9,9942} \Leftrightarrow c = 6,4690 \ Ns/m$$

f) Resposta livre do sistema sub-amortecido:

$$\theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad , \text{ onde}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d}\right)^2 + \theta_0^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d \ \theta_0}$$

Através do gráfico do enunciado, temos:

$$0,1445 = A \times e^{-0,05394 \times 9,9942 \times 0,1525} \Leftrightarrow A = 0,1569$$

A velocidade de resposta inicial, em $t = 0\,s$, é então:

$$0,1569 = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + 0,05394 \times 9,9942 \times 0}{9,97965}\right)^2 + 0^2} \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = 1,5658 \ rad/s$$

Energia dissipada pelo amortecedor:

No estado de repouso, temos que:

$$E_c = 0 \ J \quad \wedge \quad E_p = 0 \ J$$

Logo após aplicação da perturbação inicial, temos:

$$E_c = \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}_0(i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 0{,}015 \times 1{,}5658^2 =$$

$$= 0{,}01839 \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times k_{eq} \times \theta_0(i)^2 =$$

$= 0$, pelo enunciado

$$= 0 \text{ J}$$

Então, a energia dissipada é:

$$E_{dissipada} = \Delta E_{mec} = E_{mec_f} - E_{mec_i} =$$

$$= \left(\underbrace{E_{c_f}}_{=0} + \underbrace{E_{p_f}}_{=0}\right) - \left(E_{c_i} + \underbrace{E_{p_i}}_{=0}\right) = -E_{c_i}$$

Conclui-se que o amortecedor dissipa cerca de 0,01839 J.

g) A resposta estacionária é dada por:

$$\theta_p(t) = \Theta_\omega \cos(\omega t - \phi), \text{ onde}$$

$$\Theta(\omega) = \frac{f_{eq}/k_{eq}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

A amplitude tem que ser igual a 0.01 m e $a = 0{,}05$ m, então:



$$2 \times 0{,}05 \times \text{sen}\,\Theta(\omega) = 0.01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0.100167 \text{ rad}$$

O valor de β é obtido através de

$$\theta(w) = \frac{\frac{F_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 0.100167 = \frac{\frac{0.05 \times 397,7521}{0.005 \times 397,7521 - 0.4905}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0.05394 \times \beta)^2}} \quad (*)$$

(*) $\beta = -1,2837 \quad \vee \quad \beta = -0,5834 \quad \vee \quad \beta = 0,5834 \quad \vee \quad \beta = 1,2837$

Como temos que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ tem que ser superior a $\pi/2$, então β tem que ser também superior a 1, logo

$$\beta = 1,2837$$

Então

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0.05394 \times 1,2837}{1 - 1,2837^2} = -0.21058 + \pi =$$

$$= 2.9310 > \pi/2$$

∴ A frequência de excitação é portanto:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad 1,2837 = \frac{\omega}{9,9942} \quad (=) \quad \omega = 12,8296 \ rad/s$$

Exame de Recurso de 2008-07-11
Parte Prática (2ª Parte da Matéria)
Exercício 2

Exames Gerais 183 até 192

a) $a_{11} = \omega(x=2)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 4^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times4 - 3\times6)\,2^3 + 3\times6\times(6-4)\,2^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}7901$

$a_{12} = \omega(x=2)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 2^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times2 - 3\times6)\times2^3 + 3\times6\times(6-2)\,2^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}5432$

$a_{21} = a_{12}$

$a_{22} = \omega(x=4)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 2^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times2 - 3\times6)\,4^3 + 3\times6\times(6-2)\,4^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}7901$

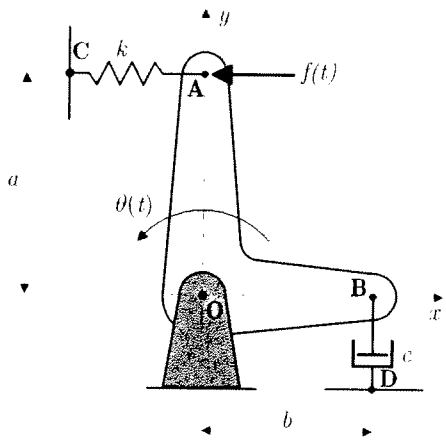
Então, a matriz dos coeficientes de flexibilidade é:

$$[a] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}7901 & 0{,}5432 \\ 0{,}5432 & 0{,}7901 \end{bmatrix}$$

b) Matriz de rigidez:

$$[k] = [a]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.4001 & -1{,}6501 \\ -1{,}6501 & 2.4001 \end{bmatrix} EI \quad [N/m]$$

c) Em notação matricial, temos: $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$



1) (6 val.) A barra em forma de **L** representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A barra está ligada ao exterior, através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da barra em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.

Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 1200$ N/m $\quad c = 40$ Ns/m $\quad J = 0.1$ kgm^2 $\quad a = 0.15$ m $\quad b = 0.12$ m

determinar:

b) (10%) A razão de amortecimento;

c) (10%) A frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10^o$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, determinar,

d) (10%) o número de ciclos necessários para que a amplitude se atenue para um valor inferior a 5% de θ_0;

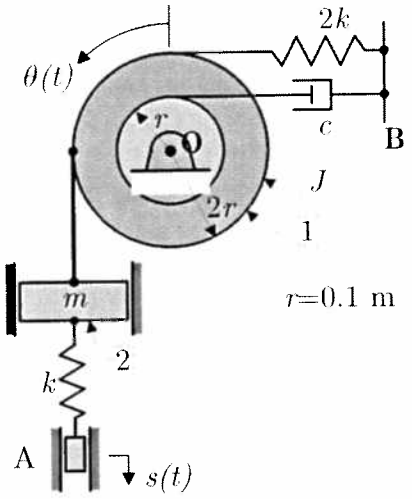
e) (15%) a energia dissipada até ao instante em que o sistema passa pela segunda vez na posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 50 N e uma frequência de 3 Hz, determinar:

f) (15%) a resposta estacionária do sistema;

g) (10%) a força transmitida ao apoio **D**;

h) (10%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**.



2) (6 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- corpo 1, polia que roda em torno do ponto **O**, com momento de inércia J, e que está ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez $2k$ e de um amortecedor viscoso de constante c;
- corpo 2, massa m que translada verticalmente e que está ligada à polia através de um tirante e a uma mola linear elástica de rigidez k que, na outra extremidade, está submetida a um deslocamento $s(t)$.

Na situação de equilíbrio estático, $\theta(t) = 0$ rad e $s(t) = 0$ m.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, assumir que a equação do movimento é a seguinte:

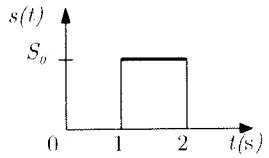
$$0.1\ddot{\theta}(t) + 0.1\dot{\theta}(t) + 192\theta(t) = 320s(t)$$

b) (20%) Determinar a(s) frequência(s) do movimento harmónico $s(t) = 0.02\cos(\omega t)$ para a qual(s) a amplitude de deslocamento da massa, em regime estacionário, não ultrapassa 10 mm.

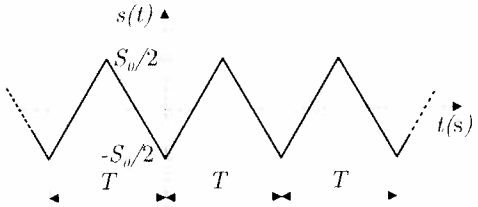
c) (20%) Nas condições da alínea anterior, determinar a amplitude máxima da componente horizontal da força no apoio **O**.

Na resolução das alíneas seguintes, assumir que o amortecimento é nulo.

d) (20%) Determinar uma expressão para a rotação do disco no intervalo $1 \le t \le 2$ s, quando ao disco é aplicada a perturbação inicial ($t = 0$ s) $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 1$ rad/s e o ponto **A** é sujeito ao deslocamento transiente $s(t)$ representado na figura seguinte.



e) (20%) Admitindo que o deslocamento $s(t)$ é periódico com período $T = 0.2$ s e com a forma representada na figura seguinte, obter uma estimativa para o deslocamento angular do disco (pretende-se a melhor estimativa dada por uma expressão com apenas um termo função do tempo).



Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \qquad \int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

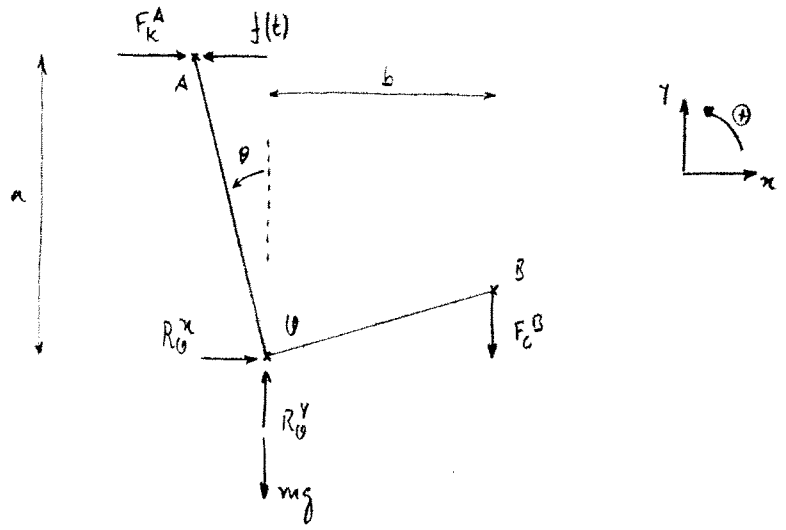
$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2009 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando o sistema é perturbado temos:



a) No ponto A:

$$\vec{v_A} = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v_A} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_k^A} = -K \times \Delta\vec{v_A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} K_0\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{v_B} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v_B} = \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_C} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_c^B} = -c \times \vec{v_c} = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K_O} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\,\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\sum \vec{\pi}_O = \vec{K}_O \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}(t) \right) + \vec{OB} \times \vec{F}_C^B = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=) \quad -Ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad J\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + Ka^2\theta = a f(t)$$

Temos finalmente:

$$J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + Ka^2\theta(t) = a f(t)$$

b) A equação do movimento é:

$$0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 40 \times 0{,}12^2\,\dot{\theta}(t) + 1200 \times 0{,}15^2\,\theta(t) = 0{,}15 f(t) \quad (=)$$

$$(=) \quad 0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}576\,\dot{\theta}(t) + 27\,\theta(t) = 0{,}15 f(t)$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}576}{2 \times 0{,}1 \times 16{,}43168} = 0{,}17527$$

Frequência natural não amortecida:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{27}{0{,}1}} = 16{,}43168 \ rad/s$$

c) Frequência natural amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 16{,}43168 \times \sqrt{1 - 0{,}17527^2} = 16{,}17732 \ rad/s$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{16{,}17732} = 0{,}38839 \ s$$

d) Perturbação inicial: $\theta_0 = 10° = \frac{10 \times \pi}{180} = 0{,}17453 \text{ rad}$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}$$

Pretende-se atenuar o valor de θ_0 para $\theta_0' = 0{,}17453 \times 0{,}05 = 0{,}00873$.

Decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \delta = \frac{2\pi \times 0{,}17527}{\sqrt{1-0{,}17527^2}} = 1{,}11857$$

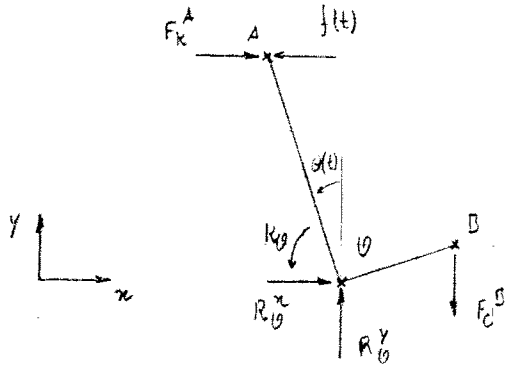
$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad 1{,}11857 = \frac{1}{N} \times \ln \frac{0{,}17453}{0{,}00873} \Leftrightarrow N = 2{,}67782$$

Deste modo, são necessários $N=3$ ciclos para a amplitude se atenue para o valor pretendido.

e)

1ª Prova de Avaliação 29-04-2009
Parte Prática
Exercício 1

a) · Diagrama de corpo livre



$\overline{OA} = a$
$\overline{OB} = b$

· No ponto A, temos:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} -a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B, temos:

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \vec{OB} = \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^B} = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

· Como o ponto $O \equiv G$, temos:

$$\vec{k_O} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{H}_O = \vec{K}_O \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{OA} \times \left(\vec{F_K^A} + \vec{f(t)} \right) + \vec{OB} \times \vec{F_C^B} = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -Ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J_O \ddot{\theta}$$

Então:

$$\underbrace{J_O}_{m_{eq}} \ddot{\theta}(t) + \underbrace{cb^2}_{c_{eq}} \dot{\theta}(t) + \underbrace{Ka^2}_{K_{eq}} \theta(t) = \underbrace{a f(t)}_{F_{eq}} \quad //$$

b) Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n}$$

O parâmetro ω_n (frequência natural de vibração ou frequência natural não amortecida) é dado por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1200 \times 0.15^2}{0.1}} = 16{,}4317 \text{ rad/s}$$

Então:

$$\zeta = \frac{40 \times 0.12^2}{2 \times 0.1 \times 16{,}4317} = 0{,}1753 \quad , \text{ estamos perante um sistema sub-amortecido!} \quad //$$

c) Frequência angular amortecida

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} = 16{,}4317 \times \sqrt{1 - 0{,}1753^2} = 16{,}1773 \text{ rad/s} \quad //$$

Período amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{16{,}1773} = 0{,}3884 \text{ s} \quad //$$

d) · Temos que:

$\theta_0 = 10° = 0{,}174533$ rad $\Rightarrow$ 5% de θ_0 é $\theta_0' = 0{,}5° = 0{,}008727$ rad

Decremento logarítmico

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \delta = \frac{2\times\pi\times 0.1753}{\sqrt{1-0.1753^2}} = 1{,}1188$$

Para saber N, temos:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)}$$

$$1{,}1188 = \frac{1}{N} \ln \frac{0{,}174533}{0{,}008727} \Leftrightarrow N = 2{,}6776$$

· O número de ciclos necessários é aproximadamente $N = 3$. //

e) · No instante inicial, temos:

$\theta_0 = 10°$, $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s

$T = 0$ J

$V = \frac{1}{2} K [\theta(t)]^2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2} \times K \times [-a\theta]^2 \therefore$

$\therefore V = \frac{1}{2} \times 1200 \times [-0{,}15 \times 0{,}174533]^2 \Leftrightarrow V = 0{,}4112$ J

· No instante em que o sistema passa pela segunda vez na posição de equilíbrio estático, temos:

$V = 0$ J

$T = \frac{1}{2} m [\dot{\theta}(t)]^2$

A resposta natural para um sistema sub-amortecido é dada por:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} \therefore$$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\left(\frac{0 + 0.1753 \times 16.4317 \times 0.174533}{16.4317 \times \sqrt{1 - 0.1753^2}} \right)^2 + 0.174533^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad A = 0,1773 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, \theta_0} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{0 + 0.1753 \times 16.4317 \times 0.174533}{16.4317 \times \sqrt{1 - 0.1753^2} \times 0.174533} \quad (=)$$

$$(=) \quad \phi = 0.1762 \text{ rad}$$

Então

$$\theta(t) = 0.1773 \times e^{-0.1753 \times 16,4317 \times t} \cos(16,1773 \times t - 0.1762)$$

A velocidade de resposta natural é dada por

$$\dot{\theta}(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \left(-\zeta \omega_n \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \right) \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}(t) = 0.1773 \times e^{-0.1753 \times 16,4317 \times t} \times \left(-0.1753 \times 16.4317 \times \cos(16,1773 \times t - 0.1762) - 16,1773 \times \operatorname{sen}(16,1773 \times t - 0.1762) \right)$$

O instante em que o sistema para pela segunda vez no ponto de equilíbrio estático é dado por

$$t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{2n-1}{2} \pi + \phi \right) \wedge n = 2 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{16,1773} \times \left(\frac{2 \times 2 - 1}{2} \times \pi + 0.1762 \right) \quad (=)$$

$$(=) \quad t\Big|_{\theta(t)=0 \wedge n=2} = 0,3022 \text{ s}$$

Então :

$$\dot{\theta}(t = 0.3022\,s) = 1,2011 \text{ rad/s}$$

Então, a energia cinética é:

$$T = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 1,2011^2 = 0.0721 \text{ J}$$

A energia dissipada é dada por:

$$E_{dissipada} = V - T =$$

$$= 0.4112 - 0,0721 =$$

$$= 0,3391 \text{ J}$$

f) · Resposta estacionária do sistema

$$\theta(t) = \Theta_s \mu \cos(\omega t - \phi)$$

A razão de frequências β é dada por: (ω → frequência de excitação)

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times \pi \times f}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{2 \times \pi \times 3}{16,4317} = 1,1471$$

O deslocamento estático x_s é dado por

$$\Theta_s = \frac{F_{eq}}{k_{eq}} \Leftrightarrow \Theta = \frac{a \times F}{K a^2} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Theta_s = \frac{0.15 \times 50}{1200 \times 0.15^2} \Leftrightarrow \Theta_s = 0,2778$$

A amplitude $\Theta(\omega)$ é dada por:

$$\Theta(\omega) = \frac{\Theta_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Theta(\omega) = \frac{0,2778}{\sqrt{(1-1,1471^2)^2 + (2 \times 0.1753 \times 1,1471)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta(\omega) = 0.5432$$

Factor de amplificação dinâmica

$$\mu = \frac{\Theta(\omega)}{\theta_s} \qquad \mu = \frac{0.5432}{0.2778} = 1,9554$$

Então

$$\theta_p(t) = 0,2778 \times 1,9554 \times \cos(6\pi t + 0,9051) =$$

$$= 0,5432 \times \cos(6\pi t + 0,9051)$$

Em que ϕ é

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,1753 \times 1,1471}{(1-1,1471^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = -0,9051$$

g) A força transmitida ao apoio O é simétrica da força de amortecimento:

$$\overrightarrow{F_c^{\,B}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da equação do movimento, temos:

$$c_{eq} = cb^2 = 40 \times 0.12^2 = 0,576$$

Derivando $\theta(t)$, temos

h) $\omega_n = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 16,4317 \times \sqrt{1-2 \times 0,1753^2} = 15,9187$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{0,15 \times 50}{1200 \times 0,15^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{0,27778}{0,34517} = 0,80476 \text{ rad}$$

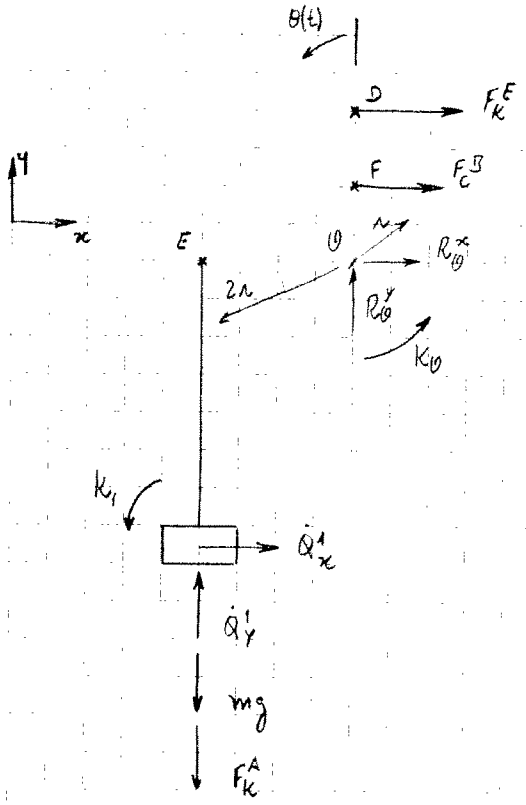
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{15,9187}{16,4317} = 0,96878$$

No ponto A:

A velocidade máxima é $0,15 \times 0,80476 = 0.12071$ m

1ª Prova de Avaliação 29-04-2009
Parte prática
Exercício 2

a) Diagrama de corpo livre



$r = 0.1\ m$

No ponto D, temos:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{Bmatrix} -2r\sin\theta \\ 2r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \overrightarrow{OD} = \begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Na situação de equilíbrio estático, temos:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \quad : \quad \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_K^D + \overrightarrow{OE} \times m\vec{g} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} K\theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2r \\ -2r\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2rK\theta_0 + 2rmg = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{mg}{K}$$

$$\vec{F}_K^D = -K \times \Delta\overrightarrow{OD} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mg/K \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

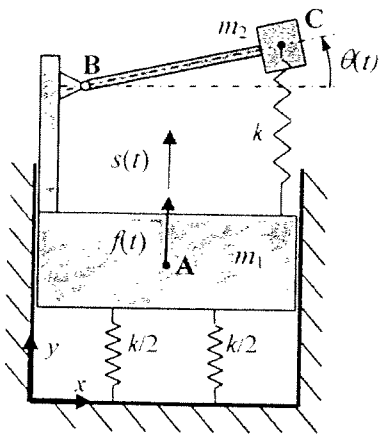
$$= -K \times \begin{Bmatrix} -2r\theta - mg/k \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2rK\theta + mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto F, temos:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -r\theta \\ r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_c'} = -c \times \vec{v}_F = -c \times \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cr\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



1) (6 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $s(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco e pelo pêndulo **BC**. O bloco tem massa m_1, está ligado a uma fundação por 2 molas lineares elásticas de rigidez $k/2$ e é actuado por uma força $f(t)$. O pêndulo **BC** é formado por uma viga rígida, de comprimento a ($\overline{BC} = a$) e de massa desprezável, e por uma massa m_2 localizada no ponto **C**. O mesmo pêndulo encontra-se ligado ao bloco por uma rótula plana em **B** e por uma mola linear elástica de rigidez k em **C**. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, o sistema está em equilíbrio estático.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) (20%) Supondo que é aplicada uma excitação da forma $f(t) = F\cos(\omega t)$, com ω a frequência natural do sistema sem o pêndulo (i.e., o sistema formado apenas pelo bloco e molas que o ligam à fundação), determinar a expressão a que m_2 deve obedecer por forma que as vibrações do bloco cessem.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal.

e) (20%) Supondo que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1$ kg e $k = 2000$ N/m e considerando a resposta estacionária do sistema a uma força $f(t) = 10\cos(48t)$ N, obter, utilizando a análise modal truncada, uma estimativa para a força que as molas transmitem à fundação.

2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de secção recta constante com momento polar I_p e de material com módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Na extremidade $x = 0$, o veio está ligado a uma mola de torção de rigidez k_t e em $x = \ell/2$ está montada uma roda de momento polar de inércia J.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\Theta(x)$.

Para $k_t = \alpha \frac{GI_p}{\ell}$ e $J = \beta \rho I_p \ell$,

c) (30%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = \sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}} g(\delta, \alpha, \beta)$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

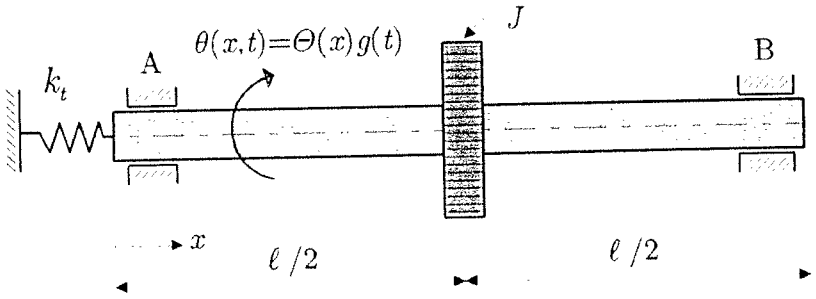
d) (15%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k_t : $k_t \to 0$ e $k_t \to \infty$.

Para $\alpha = 2$ e $\beta = 9$,

e) (15%) Determinar o valor óptimo do parâmetro δ da função $\Theta(x)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração para o método de Rayleigh.

Para $J = 0$, utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$,

f) (20%) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado.



2ª Prova de avaliação 23-06-2009
Parte Prática
Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = s(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{s}(t)$
$q_2 = \theta(t) \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética:

$$T = \tfrac{1}{2} \times m_1 \times \dot{s}^2 + \tfrac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{s} + a \operatorname{sen} \dot{\theta})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \tfrac{1}{2} \times m_1 \times \dot{s}^2 + \tfrac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{s} + a\dot{\theta})^2$$

Energia potencial:

$$V = \tfrac{1}{2} k_{/2} s^2 + \tfrac{1}{2} k_{/2} s^2 + \tfrac{1}{2} k \times (a \operatorname{sen} \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = k_{/2} s^2 + k_{/2} (a\theta)^2$$

Forças não - conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial s}{\partial s} + 0 \frac{\partial \theta}{\partial s} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial s}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0$$

Considerando as equações de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m_1 \dot{s} + m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = k s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})\, a = a m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = a\, m_2 \left(\ddot{s} + a\ddot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K a \theta\, a = K a^2 \theta$$

Temos então:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) - 0 + Ks = f(t) \\ a m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) - 0 + K a^2 \theta = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & a m_2 \\ a m_2 & m_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & a^2 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Excitação na forma $f(t) = F\cos(\omega t)$

Temos:

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

$$\left[[k] - \omega^2 [m]\right] \{u\} = \{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 (m_1 + m_2) & 0 - \omega^2 (a m_2) \\ 0 - \omega^2 (a m_2) & a^2 K - \omega^2 (a^2 m_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$S(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} =$$

$$= \frac{\left[a^2 K - \omega^2 a^2 m_2\right] F - 0}{\left[K - \omega^2 (m_1 + m_2)\right] \cdot \left[a^2 K - \omega^2 a^2 m^2\right] - \left[\omega^2 a m_2\right]^2}$$

Para que $S(\omega) = 0$, então: $\cancel{a^2} K = \omega^2 \cancel{a^2} m_2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{K}{\omega^2}$

Como $m_1 = \frac{k}{\omega^2}$, então: $m_1 = m_2$.

c) Considerando:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 2000 - \omega^2\, 11 & 0 - \omega^2\, 0.5 \\ 0 - \omega^2 0.5 & 500 - 0.25\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2000 - 11\,\omega^2 & -0{,}5\,\omega^2 \\ -0{,}5\,\omega^2 & 500 - 0{,}25\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 13{,}424 \ \text{rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 = 47{,}115 \ \text{rad/s}$

1ª Forma natural:

$$\left[2000 - 11 \times 13{,}424^2 \right] u_1 - \left[0{,}5 \times 13{,}424^2 \right] u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u_1 = 5{,}074\ u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma natural:

$$\left[2000 - 11 \times 47{,}115^2 \right] u_1 - \left[0{,}5 \times 47{,}115^2 \right] u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -0{,}0495\ u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}0495 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d) Temos:

$$\bullet \ \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1 \right]^{0.5}} \{u\}_1$$

$$\therefore \ \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 5{,}074 ; 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]^{0{,}5}} \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}2987 \\ 0{,}0589 \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \ \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2 \right]^{0.5}} \{u\}_2$$

$$\therefore \ \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -0.1038 \\ 2{,}0968 \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base nodal:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}424^2 & 0 \\ 0 & 47{,}115^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2987 & 0{,}0589 \\ -0{,}1038 & 2{,}0968 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(*) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 13{,}424^2\,\eta_1(t) = 0{,}2987\,f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1038\,f(t) \end{cases} \quad (2)$$

e) $m_1 = 10\ kg$
$m_2 = 1\ kg$
$K = 2000\ N/m$

$f(t) = 10\cos(48t)\ [N]$

Temos que $\omega_2 = 47{,}115\ rad/s$ é o valor mais próximo de $\omega = 48\ rad/s$, então, através da equação 2, temos:

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1038\,f(t)$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = +0{,}1038 \times 10 \times \cos(48t)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\frac{0{,}1038 \times 10}{47{,}115^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} = 0.0123$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{48}{47{,}115}$$

$$\eta_2(t) = 0{,}0123\cos(48t)$$

Então: $\begin{Bmatrix} \Delta(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \times \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} \Delta(t) = 0{,}2987 \times \eta_1 + (-0{,}1038)\,\eta_2 \\ \theta(t) = 0{,}0589 \times \eta_1 + 2.0968\,\eta_2 \end{cases}$$

$$\Delta(t) = -0{,}1038 \times 0{,}0123\cos(48t) = -0{,}00128\cos(48t)$$

Finalmente:

$$\vec{F} = 2 \times \frac{K}{2} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta(t) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_1+m_2)g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}553\cos(48t) - 109{,}8 \end{Bmatrix}$$

2ª Prova de avaliação 23-06-2009
Parte Prática
Exercício 2

a) Condições de fronteira:

$x = 0$: $\quad G I_p \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} = k_t \times \theta(x)\Big|_{x=0}$

$x = \ell$: $\quad G I_p \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0$

Ambas as condições de fronteira são naturais.

b) Função de aproximação : $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$

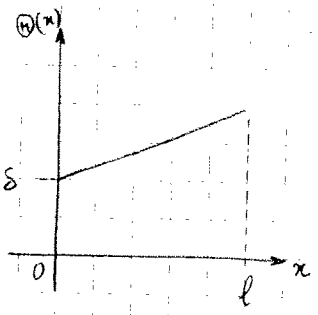
Derivável pelo menos uma vez (problema de 2ª ordem):

$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow$ Verifica !

· Respeitar as condições de fronteira geométricas :

Não existem , logo estão verificadas !

Esboço:



c) $V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell G I_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 dx + V_{cfn} =$

$= \frac{1}{2} G I_p \int_0^\ell \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 dx + V_{cfn} =$

$= \frac{1}{2} G I_p \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} \times k_t \times \left[\theta(x)\right]^2_{x=0} =$

$= \frac{G I_p}{2} \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} \propto \frac{G I_p}{\ell} \times \delta^2 =$

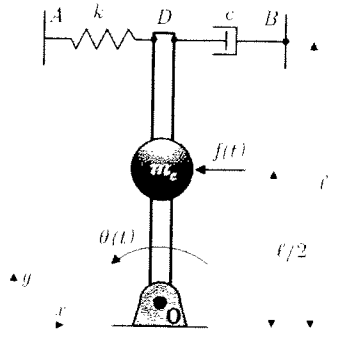
$= \frac{G I_p}{2\ell} \left(1 + \propto \delta^2\right)$

$$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho(x) \left(\Theta(x) \right)^2 dx + T^*_{cfjn} \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \beta \rho I_p \ell \left(\delta + \frac{x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} J \left[\Theta(x) \Big|_{x=\ell/2} \right]^2 \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} \beta \rho I_p \int_0^\ell \ell \left(\delta^2 + 2\frac{\delta x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2} \right) dx + \frac{1}{2} J \left(\delta + \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$=$$



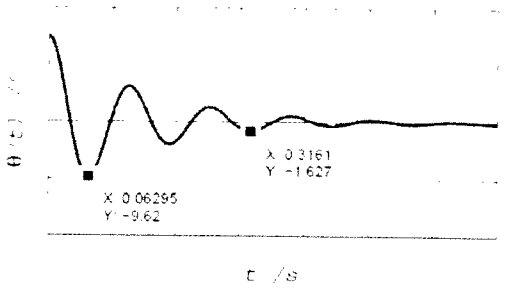
1) (4 val.) A figura representa um pêndulo invertido constituído por uma barra rígida de massa m_b e de comprimento ℓ, articulada numa das extremidades e, na outra, ligada ao exterior através de um amortecedor viscoso de constante c e de uma mola linear elástica de constante k. Em $\ell/2$ está montada uma massa concentrada m_c. O movimento angular do pêndulo é caracterizado pela coordenada generalizada $\theta(t)$. Para $\theta(t)=0$, a barra encontra-se na vertical.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial de movimento;

Para caracterizar o amortecimento do sistema, aplica-se uma perturbação inicial que provoca a resposta livre ou natural representada na figura.

Para a aplicação numérica

$m_b = 0.82\,\text{kg}$ $\quad m_c = 0.50\,\text{kg}$ $\quad \ell = 300\,\text{mm}$,



determinar:

b) (10%) o decremento logarítmico e a razão de amortecimento;

c) (10%) frequência natural amortecida e não amortecida;

d) (10%) a constante k de rigidez da mola;

e) (10%) a constante c do amortecedor viscoso;

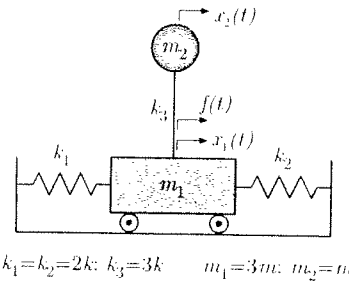
Para caracterizar o comportamento do sistema em frequência, aplica-se uma força harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ de amplitude $F = 12\,\text{N}$ e faz-se variar a frequência.

Determinar:

f) (10%) a frequência para a qual a amplitude $\Theta(\omega)$ é máxima e a respectiva amplitude;

g) (20%) a(s) frequência(s) ω de excitação para a(s) qual(is) a elongação da mola e/ou o curso do amortecedor seja inferior a $10\,\text{mm}$.

h) (10%) nas condições da alínea anterior, determinar o valor máximo da força desenvolvida pelo amortecedor.



$k_1=k_2=2k;\ k_3=3k$ $\quad m_1=3m;\ m_2=m$

2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera, respectivamente.

a) (20%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para resolver as alíneas seguintes, utilizar as equações de movimento seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

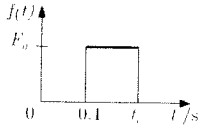
Para $k = 200\ \text{Nm}^{-1}$ e $m = 2\ \text{kg}$,

c) (20%) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4\ \text{rads}^{-1}$.

d) (10%) Se $f(t) = F\cos\omega t$, determinar a frequência de excitação ω para a qual o sistema barra/esfera actua como um absorsor de vibrações.

e) (10%) Escrever as equações de movimento do sistema na base modal.

f) (20%) Determinar uma estimativa do valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.5\ s$.



Momento dinâmico:

$$\vec{K}_{\theta}{}_{\text{Total}} = \vec{K}_{\theta}{}_{\text{massa c}} + \vec{K}_{\theta}{}_{\text{barra}} =$$

$$= \vec{K}_{C}{}_{\text{massa c}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_{C}{}_{\text{massa}_C} + \vec{K}_{C}{}_{\text{barra}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_{C}{}_{\text{barra}}$$

$$J_{\theta} = J_{\theta}{}_{\text{barra}} + J_{\theta}{}_{\text{massa}} = \quad = 0, \text{ porque é massa concentrada}$$

$$= J_{C}{}_{\text{barra}} + m_{\text{barra}} \times \overline{OC}^2 + J_{C}{}_{\text{massa}} + m_{\text{massa}} \times \overline{OC}^2 =$$

$$= \frac{1}{12} \times m_{\text{barra}} \times \ell^2 + m_{\text{barra}} \times \frac{\ell^2}{4} + m_{\text{massa}} \times \frac{\ell^2}{4} =$$

$$= \frac{4}{12} m_{\text{barra}} \ell^2 + m_{\text{massa}} \frac{\ell^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} m_{\text{barra}} + \frac{1}{4} m_{\text{massa}}\right) \ell^2$$

Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_{\theta} = \vec{K}_{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad \vec{OC} \times \vec{F}(t) + \vec{OC} \times \left(m_c \vec{g} + m_b \vec{g}\right) + \vec{OD} \times \left(\vec{F}_K^D + \vec{F}_C^D\right) = \vec{K}_{\theta} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -\ell/2\,\theta \\ \ell/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_c g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_b g \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} -\ell\theta \\ \ell \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} k\ell\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c\ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} \end{Bmatrix} (=$$

$$(=) \quad \ell/2\,\theta \left(m_c g + m_b g\right) + \ell/2\, f(t) - k\ell^2\theta - c\ell^2\dot{\theta} = \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} \quad (=$$

$$(=) \quad \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} + c\ell^2\dot{\theta} + \left(k\ell^2 - \ell/2\left(m_c g + m_b g\right)\right)\theta = \ell/2\, f(t)$$

Temos finalmente:

$$\left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2\, \ddot{\theta}(t) + c\ell^2\dot{\theta}(t) + \left(k\ell^2 - \ell/2\left(m_c g + m_b g\right)\right)\theta(t) = \ell/2\, f(t)$$

b) Decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{2} \ln \frac{-9{,}62}{-1{,}627} = 0{,}88855$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}88855}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}88855^2}} = 0{,}14002$$

c) A equação do movimento é:

$$\left(\tfrac{1}{3} m_b + \tfrac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta}(t) + c\ell^2 \dot{\theta}(t) + \left(K\ell^2 - \tfrac{\ell}{2}(m_c g + m_b g)\right)\theta(t) = \tfrac{\ell}{2} f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{3} \times 0{,}82 + \tfrac{1}{4} \times 0{,}50\right) \times 0{,}3^2 \ddot{\theta}(t) + 0{,}3^2 c \dot{\theta}(t) + \left(K \times 0{,}3^2 - 0{,}15\left(0{,}50 \times 9{,}8 + 0{,}82 \times 9{,}8\right)\right)\theta(t) =$$

$$= 0{,}15 f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}03585 \ddot{\theta}(t) + 0{,}3^2 c \dot{\theta}(t) + \left(0{,}3^2 K - 1{,}9404\right)\theta(t) = 0{,}15 f(t)$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0{,}3161 - 0{,}06295}{2} = 0{,}12658 \ s$$

Frequência natural amortecida:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0{,}12658} = 49{,}63806 \ rad/s$$

Frequência natural não amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad 49{,}63806 = \omega_n \sqrt{1 - 0{,}14002^2} \Leftrightarrow \omega_n = 50{,}13193 \ rad/s$$

d) Frequência natural não amortecida:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad 50{,}13193 = \sqrt{\frac{\left(0{,}3^2 K - 1{,}9404\right)}{0{,}03585}} \Leftrightarrow K = 1022{,}65548 \ N/m$$

e) Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad 0{,}14002 = \frac{0{,}3^2 c}{2 \times 0{,}03585 \times 50{,}13193} \Leftrightarrow c = 5{,}59218 \ Ns/m$$

f) Aplicando uma força harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$; $F = 12N$

A amplitude $\theta(\omega)$ é máxima para a frequência de ressonância ω_r:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 50{,}13193 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}14002^2} = 49{,}13923 \ rad/s$$

Razão de frequências:

$$\beta = \frac{\omega_r}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{49{,}13923}{50{,}13193} = 0{,}98020$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$M_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad M_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}14002 \times \sqrt{1 - 0{,}14002^2}} = 3{,}60645$$

A amplitude máxima de $\theta(\omega)$ é:

$$\mu_{max} = \frac{\theta(\omega)}{\theta_s} \quad \therefore \quad \theta(\omega) = 3{,}60645 \times \frac{0{,}15 \times 12}{0{,}3^2 \times 1022{,}65548 - 1{,}9404} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta(\omega) = 0{,}07205 \text{ rad} //$$

Exame de Recurso de 17-07-2009 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_C = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2$

Energia potencial: $V = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x_1$

$$Q_1 = f(t) \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = f(t)$$

$$Q_2 = 0 + 0 = 0$$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$ $\quad \frac{dV}{dx_1} = k_1 x_1 + k_2 x_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\quad \frac{dV}{dx_2} = k_3 x_2$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial, as equações do movimento apresentam-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

b) $(*) \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$

b) Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} 5k - \omega^2 \times 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 \times m \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = 0{,}848071 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad V$$

$V \quad \omega_2 = 1{,}667566 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$

Primeira forma natural:

$$-K u_1 + \left(K - \omega_1^2 \times m\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K u_1 + \left(K - 0{,}848071^2 \frac{K}{m} m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = 3{,}561563\, u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}561563 \end{Bmatrix}$$

Segunda forma natural:

$$-K u_1 + \left(K - \omega_2^2 m\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K u_1 + \left(K - 1{,}667566^2 \frac{K}{m} m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = -0{,}561553\, u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}561553 \end{Bmatrix}$$

c) Temos:

$$z_{11}(\omega) = -\omega^2 m_{11} + K_{11} \quad \therefore \quad z_{11}(\omega) = -14{,}4^2 \times 4 + 1000 = 170{,}56$$

$$z_{22}(\omega) = -\omega^2 m_{22} + K_{22} \quad \therefore \quad z_{22}(\omega) = -14{,}4^2 \times 2 + 200 = -214{,}72$$

$$z_{12}(\omega) = -\omega^2 m_{12} + K_{12} \quad \therefore \quad z_{12}(\omega) = 0 + (-200) = -200$$

Então, para $f(t) = F \cos \omega t$ com $\omega = 14{,}4$ rad/s temos:

$$X_1(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \quad \therefore \quad X_1(\omega) = \frac{-214{,}72\, F}{(170{,}56 \times (-214{,}72)) - (-200)^2} = 0{,}002802\, F \ [m]$$

d) Para que o sistema barra-mola funcione como um absorsor de vibrações, temos:

$$\omega_s = \omega = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} \quad \therefore \quad \omega_s = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s}$$

Isto é, para uma frequência natural do sistema secundário $\omega_s = 10$ rad/s idêntica à frequência de excitação, a amplitude de deslocamento da massa principal é nula, e o sistema auxiliar diz-se sintonizado para a frequência de excitação.

e) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,184524\\0,657193\end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,464705\\-0,260959\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

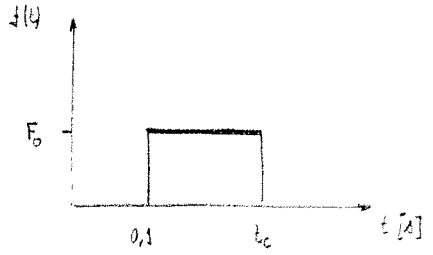
$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t)\\\ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0,848071^2 \times 100 & 0\\0 & 1,667566^2 \times 100\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0,184524 & 0,464705\\0,657193 & -0,260959\end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix}f(t)\\0\end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t)\\\ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}71,922442 & 0\\0 & 278,077636\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0,184524\ f(t)\\0,464705\ f(t)\end{bmatrix}$$

f) Solicitação transiente $f(t)$ com $t_c = 0,5\ s$:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < t < 0,1 \\ F_0 & , \ 0,1 < t < t_c \\ 0 & , \ t > t_c \end{cases}$$

c) Temos:

$$X_1(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = \frac{(200 - 2 \times 14{,}4^2) \times F - (-200) \times 0}{(5 \times 200 - 4 \times 14{,}4^2) \times (200 - 2 \times 14{,}4^2) - (-200)(-200)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 0{,}0028\ F$$

d) Através da equação 20.31, temos:

$$\beta^4 - \left(2 + \frac{m_2}{m_1}\right) \beta^2 + 1 = 0 \therefore$$

$$\therefore \beta^4 - \left(2 + \frac{m}{3m}\right) \times \beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = 0{,}7522 \quad \vee \quad \beta = 1{,}3295$$

Temos agora:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega \therefore$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2 \times 200}{2}} \Leftrightarrow \omega_n = 14{,}1421$$

e) Temos:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left(\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right)^{0,5}} \{u\}_1 \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left([0{,}2808;\ 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}2808 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)^{0,5}} \begin{Bmatrix} 0{,}2808 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}18454 \\ 0{,}65718 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left(\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right)^{0,5}} \{u\}_2 \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left([-1{,}7807;\ 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}7807 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)^{0,5}} \{u\}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}46470 \\ 0{,}26097 \end{Bmatrix}$$

Temos agora:

$$[I]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + [\Omega^2]\left\{\eta(t)\right\} = [\Phi]^T\left\{f(t)\right\} \quad \Phi$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,4807^2 & 0 \\ 0 & 16,6757^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18454 & -0,46470 \\ 0,65718 & 0,26097 \end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Phi$$

$$(*) \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 8,4807^2\,\eta_1(t) = 0,18454\, f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 16,6757^2\,\eta_2(t) = -0,46470\, f(t) \end{cases} \quad //$$

f) Temos:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [\Phi]\left\{\eta(t)\right\} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \phi_{11}\,\eta_1(t) + \phi_{12}\,\eta_2(t)$$

Temos que verificar se $t \leq t_c$, então:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_{n_1}} \therefore 8,4807 = \frac{2\pi}{T_{n_1}} \Leftrightarrow T_{n_1} = 0,7409\ s$$

$$\rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{T_{n_2}} \therefore 16,6757 = \frac{2\pi}{T_{n_2}} \Leftrightarrow T_{n_2} = 0,3768\ s$$

Então: $t_c \leq \frac{T_n}{2} \rightarrow 0,5 \leq \frac{0,7409}{2}$

$$\rightarrow 0,5 \leq \frac{0,3768}{2}$$

Usa-se então $x(t) = \frac{F_0}{K}\left(1 - \cos(\omega_n t_c)\right)$

Temos:

$$\eta_1 = \frac{0,18454\ F}{8,4807^2}\left(1 - \cos(8,4807 \times (0,5 - 0,1))\right) = 0,00505\ F$$

$$\eta_2 = \frac{-0,46470\ F}{16,6757^2}\left(1 - \cos(16,6757 \times 0,4)\right) = -1,2365 \times 10^{-4} \times F$$

Então: $x_1(t)_{máx} = 0,18454 \times 0,00505\,F + (-0,46470) \times (-1,2365 \times 10^{-4} \times F)$

$$= 9,89 \times 10^{-4} \times F$$

Exame de Recurso de 17-07-2009
Parte Prática (2ª Parte da Matéria)
Exercício 3

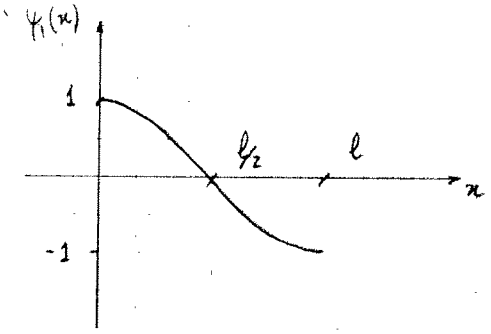
a) Para $x = 0$:

$$GI_p \left.\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = J_1 \frac{\partial^2 \theta(0,t)}{\partial t^2}$$ ← Condição de fronteira Natural

Para $x = \ell$:

$$GI_p \left.\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\ell} = J_2 \frac{\partial^2 \theta(\ell,t)}{\partial t^2}$$ ← Condição de fronteira Natural

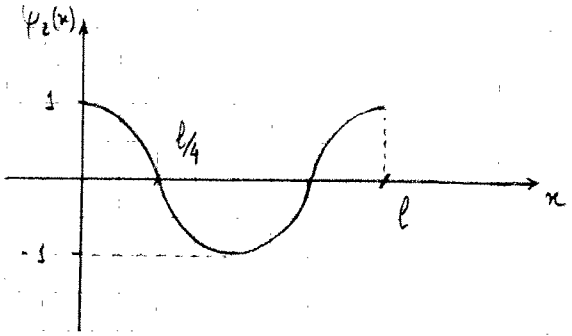
b) Para a função de aproximação : $\psi_1(x) = \cos \frac{\pi x}{\ell}$



$$\dot{\psi}_1(x) = -\frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\ddot{\psi}_2(x) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{\pi x}{\ell}$$

Para a função de aproximação : $\psi_2(x) = \cos \frac{2\pi x}{\ell}$



$$\dot{\psi}_2(x) = -\frac{2\pi}{\ell} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\ddot{\psi}_2(x) = -\frac{4\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{2\pi x}{\ell}$$

Ambas as funções são deriváveis duas vezes (problema de 4ª ordem) e como não temos condições de fronteira geométricas, então também já são respeitadas. Assim sendo, ambas as funções são admissíveis no método de Rayleigh.

A função mais adequada para estimar a frequência natural fundamental do sistema pelo método de Rayleigh é a função ψ_1, pois tem apenas 1 nodo.

c) Energia potencial:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} G I_p \left(\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right)^2 dx + V_{cfm}$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \int_0^{\ell} \left(-\frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \times \frac{\pi^2}{2\ell}$$

Energia cinética:

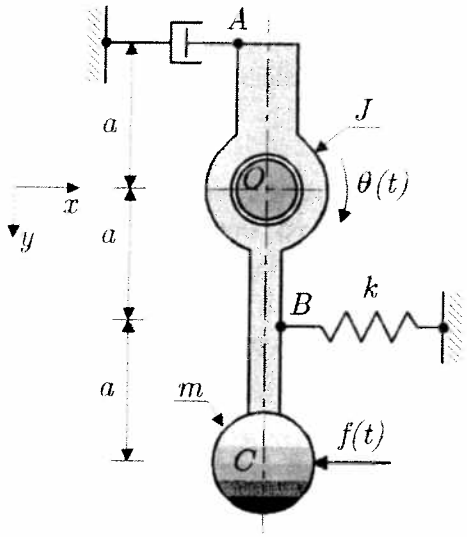
$$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\ell} J(x) \left(\theta(x) \right)^2 dx + T^*_{cfm} \right)$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} J(x) \int_0^{\ell} \left(\cos \frac{\pi x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} J_1 [\theta(0)]^2 + \frac{1}{2} J_2 [\theta(\ell)]^2 \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} J(x) \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right)$$

Agora:

$$R(v(x)) = \omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*}$$



1) (6 val.) A barra representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A barra está ligada ao exterior através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **A** e por uma mola de rigidez k no ponto **B**. O momento de inérica da barra em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. Uma massa concentrada m encontra-se rigidamente ligada à barra no ponto **C**, ponto em que é também aplicada uma solicitação horizontal $f(t)$. Na posição de equilíbrio estático a barra está na vertical, a mola não se encontra deformada e $\theta(t) = 0$.

a) (25%) Determinar a equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Na resolução das alíneas seguintes considerar a equação diferencial de movimento,

$0.65\ddot{\theta}(t) + 0.5\dot{\theta}(t) + 120\theta(t) = 0.2f(t)$ e $k = 10$ kN/m e $a = 0.1$ m.

Determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento;

c) (10%) a frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s, determinar:

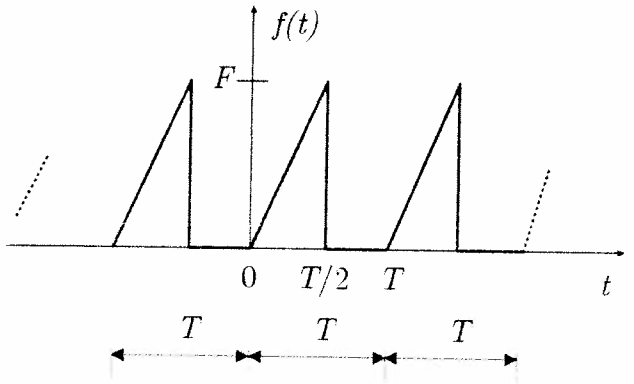
d) (15%) a energia potencial elástica máxima atingida pelo sistema.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com amplitude $F = 10$ N, determinar:

e) (10%) a frequência de ressonância de amplitude de deslocamento e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**.

f) (15%) Para a mesma solicitação harmónica, mas no caso particular em que $\omega = 10$ rad/s, determinar a resposta estacionária do sistema;

g) (15%) Para uma força periódica com período $T = 0.5\ s$ e $F = 10$ N, conforme representada na figura, determinar uma estimativa para o deslocamento angular da barra.



Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \qquad \int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$

3) (6 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por:

- corpo 1, disco de raio r e massa m que rola sem escorregar sobre uma superfície e que se encontra ligado ao corpo 2 no ponto C ($J_C = \frac{1}{2}mr^2$);
- corpo 2, barra de massa desprezável e de comprimento $2r$ articulada com o disco e o corpo 3 em B;
- corpo 3, barra de massa desprezável e de comprimento $2r$ que roda em torno do ponto fixo O, articulada com o corpo 2 e ligada a um conjunto mola-amortecedor de constantes k e c, respectivamente, e submetido a uma excitação passiva $s(t)$.

Na situação de equilíbrio estático, $\theta(t) = 0$ rad e $s(t) = 0$ m, e as oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial (linearizada) de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, considerar a equação de movimento:

$$3.75\ddot{\theta}(t) + 162.5\dot{\theta}(t) + 3.75 \times 10^4\theta(t) = 1.578 \times 10^5 s(t) \text{ e } r = 0.25 \text{ m}.$$

Para uma excitação passiva harmónica, $s(t) = S\cos\omega t$ de amplitude igual a 10 mm e frequência de 12 Hz, determinar,

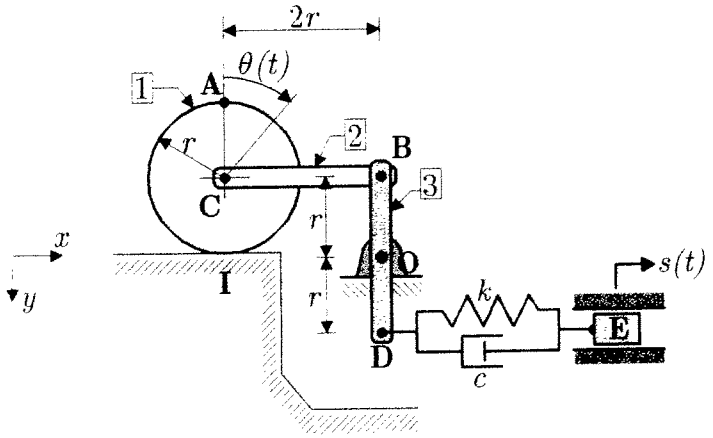
b) (15%) a amplitude de deslocamento $X_A(\omega)$ do ponto A do disco;

c) (15%) a amplitude F_T da força transmitida $f_T(t)$ no ponto B;

d) (15%) a amplitude da elongação da mola;

e) (15%) Num determinado instante do regime estacionário em que o disco atinge a posição de referência $\theta = 0$, (com valores decrescentes de θ, $\theta^+ \rightarrow \theta = 0$), é desligada a excitação, $s(t) = 0$. Determinar a expressão do movimento subsequente do sistema.

f) (15%) Para $c = 0$, redimensionar a constante de rigidez k de modo a manter a amplitude $X_A(\omega)$ do ponto A. Esboçar graficamente $X_A(\omega)$ e representar os pontos de funcionamento.

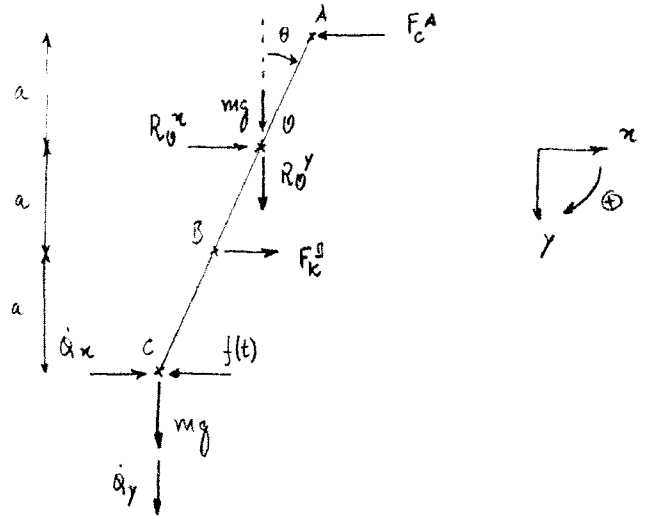


FEUP, 21.04.2010
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 21-04-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando perturbamos o sistema temos:



a) No ponto A:

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_A = \begin{Bmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{v}}_A = \begin{Bmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_c^A = -c \times \vec{v}_A = -c \times \begin{Bmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ca\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -K \times \Delta\vec{v}_B = -K\left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto C:

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{v}}_C = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_C = m \times \vec{a}_C = m \times \dot{\vec{v}}_C = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O: $= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^{barra} + \vec{K}_O^{massa} = \vec{K}_O^{barra} + \cancel{\vec{K}_C^{massa}} + \vec{OC} \times \vec{Q}_C =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} + 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \vec{F}_C^A + \vec{OB} \times \vec{F}_K^B + \vec{OC} \times m\vec{g} + \vec{OC} \times \vec{F}(t) = \vec{K}_O \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -ca\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} + 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\dot{\theta} - Ka^2\theta - 2a\theta mg + 2a f(t) = (J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (Ka^2 + 2amg)\theta = 2a f(t)$$

Temos finalmente:

$$(J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + (Ka^2 + 2amg)\theta(t) = 2c f(t)$$

b) A equação do movimento é:

$$0{,}65\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}5\,\dot{\theta}(t) + 120\,\theta(t) = 0{,}2\,f(t)$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}5}{2 \times 0{,}65 \times 13{,}58732} = 0{,}02831$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{120}{0{,}65}} = 13{,}58732 \ rad/s$$

c) Frequência angular amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 13{,}58732 \times \sqrt{1 - 0{,}02831^2} = 13{,}58187 \ rad/s$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{13{,}58187} = 0{,}46262 \ s$$

d) A energia potencial elástica máxima é dada por:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta_{max}^2$$

O instante em que o θ é máximo é dado por:

$$t\big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n-1)\pi + \phi\right), \quad n = 1$$

Considerando que os valores de $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s, então a constante ϕ é:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\theta_0} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{5+0}{0} \quad (=) \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

E a constante A é dada por:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} \quad \therefore$$

$$\therefore A = \sqrt{\left(\frac{5+0}{13,58732\sqrt{1-0,02831^2}}\right)^2 + 0^2} \quad (=) \quad A = 0,36814$$

Então, o instante de θ_{max} é:

$$t\big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{13,58187}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{0,02831}{\sqrt{1-0,02831^2}}\right) + (1-1)\pi + \pi/2\right) =$$

$$= 0,11357 \text{ s}$$

E o valor de θ_{max} é:

$$\theta_{max} = A \times e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) \quad \therefore$$

$$\therefore \theta_{máx} = 0,36814 \times e^{-0,02831 \times 13,58732 \times 0,11357} \times \cos(13,58732 \times 0,11357 - \pi/2) (=)$$

$$(=) \quad \theta_{máx} = 0,35227 \text{ rad}$$

Deste modo, a energia potencial elástica máxima é dada por:

$$V_{max} = \frac{1}{2} \times 120 \times 0,35227^2 = 7,44565 \text{ J}$$

e) Para a solicitação harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$ e $F = 10\,N$

Frequência de ressonância:

$$\omega_r = \omega_n \times \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 13{,}58732 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}02831^2} = 13{,}57643 \text{ rad/s}$$

Deslocamento estático:

$$\theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \theta_s = \frac{0{,}2 \times 10}{120} = 0{,}01667 \text{ rad}$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}02831 \times \sqrt{1 - 0{,}02831^2}} = 17{,}66869$$

A amplitude máxima é:

$$\theta(\omega) = \mu_{max} \times \theta_s \quad \therefore \quad \theta(\omega) = 17{,}66869 \times 0{,}01667 = 0{,}29454 \text{ rad}$$

Deste modo, a amplitude máxima no ponto A é:

$$\theta_A(\omega) = \overline{OA} \times \theta(\omega) \quad (=) \quad \theta_A(\omega) = a \times \theta(\omega)$$

$$\therefore \quad \theta_A(\omega) = 0{,}1 \times 0{,}29454 \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta_A(\omega) = 0{,}02945$$

f) Para o caso particular: $\omega = 10$ rad/s

Razão de frequência: $\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{10}{13{,}58732} = 0{,}73598$

A resposta estacionária do sistema é:

$$\theta_p(t) = \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Onde a amplitude $\theta(\omega)$ e o desfazamento ϕ são:

$$\theta(\omega) = \frac{F_{eq}/K_{eq}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \theta(\omega) = \frac{\frac{0{,}2 \times 10}{120}}{\sqrt{(1 - 0{,}73598^2)^2 + (2 \times 0{,}02831 \times 0{,}73598)^2}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta(\omega) = 0{,}03621 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}02831 \times 0{,}73598}{(1 - 0{,}73598^2)} = 0{,}09067 \text{ rad}$$

A resposta estacionária é então:

$$\theta_p(t) = 0{,}03621 \times \cos(10t - 0{,}09067)$$

g) Período: $T = 0{,}5\,s$

Amplitude da força: $F = 10\,N$

Frequência de excitação, ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \therefore \quad 0{,}5 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\Leftrightarrow) \quad \omega = 12{,}566371 \ rad/s$$

$$\omega_n \simeq n \times \omega \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \simeq n\omega \quad \therefore \quad \sqrt{\frac{120}{0{,}65}} \simeq n \times 12{,}566371 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 13{,}587224 \simeq n \times 12{,}566371 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

A força aplicada é:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{F}{T/2}\, t = \frac{2F}{T}\, t = \frac{2 \times 10}{0{,}5}\, t = 40t \ , & 0 \leq t < T/2 \\ 0 \ , & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier são:

$$A_0 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40\, t\, dt = 5$$

$$A_1 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40t \cos\left(1 \times \frac{2\pi}{0{,}5} \times t\right) dt = -2{,}026424$$

$$B_1 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40t \sin\left(1 \times \frac{2\pi}{0{,}5} \times t\right) dt = 3{,}183099$$

$$F_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{-2{,}026424^2 + 3{,}183099^2} = 3{,}773395$$

$$\psi_1 = \tan^{-1}\frac{B_1}{A_1} = \tan^{-1}\frac{3{,}183099}{-2{,}026424} = -1{,}003885$$

A solicitação periódica $f(t)$ quando expressa em série de Fourier fica:

$$f(t) = \frac{5}{2} + 3{,}773395 \cos\left(\frac{2\pi}{0{,}5}\, t + 1{,}003885\right)$$

Como estámos a aproximar a série apenas para o harmónico de ordem 1, então a resposta vem:

$$\theta(t) = \frac{A_0}{2k} + \Theta_1(\omega)\cos(\omega t - \psi_1 - \phi_1) =$$

$$= \frac{5}{2\times120} + \frac{3,773395}{120} \frac{1}{\left[\left(1-0,924860^2\right)^2 + \left(2\times0,028307\times0,924860\right)^2\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t + 1,003885 - 0,347340\right) =$$

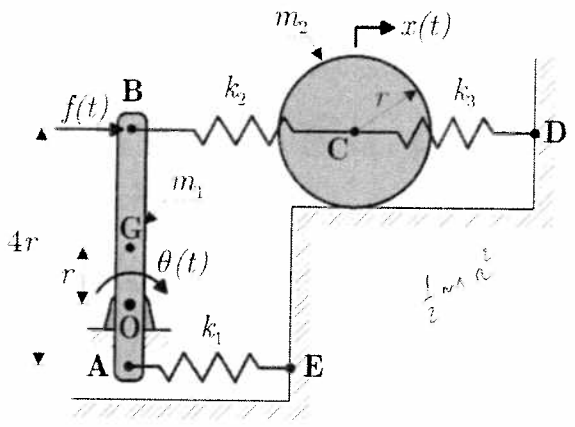
$$= 0,28526\cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t + 0,656545\right)$$

Onde:

$$\beta_1 = 1\times\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{12,586331}{13,587324} = 0,924860$$

$$\gamma = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} = \frac{0,5}{2\times0,65\times13,587324} = 0,028307$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\frac{2\gamma\beta_1}{1-\beta_1^2} = \tan^{-1}\frac{2\times0,028307\times0,924860}{1-0,924860^2} = 0,347340$$



1) (6 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, barra de massa m_1 e de comprimento $4r$ que roda em torno do ponto fixo O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola linear elástica de rigidez k_2 ;
- corpo 2, disco de massa m_2 e de raio r que rola sem escorregar sobre uma superfície e que se encontra ligado ao corpo 1 através de uma mola linear elástica de rigidez k_2 e ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_3 .

As coordenadas generalizadas $x(t)$ e $\theta(t)$ são coordenadas absolutas. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\,000 & -4000 \\ -4000 & 15\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Determinar a amplitude do deslocamento do centro do disco devido a uma excitação $f(t) = 100\cos(20t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

e) (15%) Determinar o ângulo $\theta(t)$ em função do tempo quando o sistema é sujeito a uma excitação $f(t)$ transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 100\sin\left(\dfrac{\pi}{0.4}t\right) & 0 < t \le 0.4\,\text{s} \\ 0 & t > 0.4\,\text{s} \end{cases}$$

f) (15%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação da alínea anterior.

v.s.f.f.

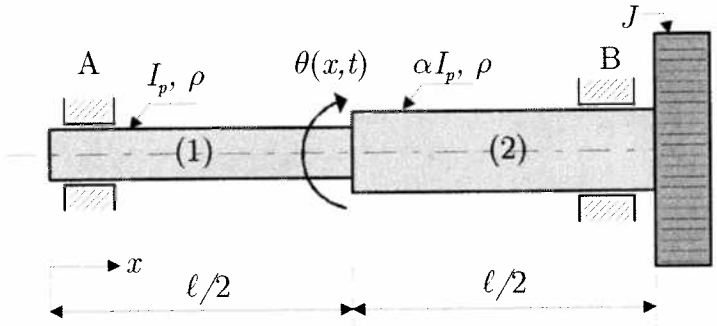
2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de dois tramos livre em $x = 0$ e com um volante em $x = \ell$. A secção recta circular do tramo (1), $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$, apresenta um momento polar I_p e a secção recta circular do tramo (2), $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$, apresenta um momento polar αI_p. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. O momento polar de inércia do volante pode exprimir-se como $J = \beta \rho I_p \ell$.

Considerar as funções $\Theta_1(x) = \delta \cos \frac{\pi}{\ell} x$ e $\Theta_2(x) = \delta \cos \frac{2\pi}{\ell} x$ como eventuais funções de aproximação para a forma natural fundamental de torção.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.
b) (20%) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação, classificá-las e seleccionar, justificando, a mais adequada para aproximação da forma natural fundamental de torção;
c) (35%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração de torção utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = g(\delta, \alpha, \beta)\sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}}$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

Utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção circular constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x\right)\left(C \cos \omega t + D \sin \omega t\right)$,

d) (30%) estabelecer, sob a forma de determinante, a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado. NOTA: utilizar coordenadas espaciais x_1 e x_2 para os tramos (1) e (2) respectivamente.



$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \qquad \int x \sin ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right) \cos ax \qquad \int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin ax$$

$$\int x \sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x \cos^2 ax dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

Feup, 07.07.2010
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

2ª Prova de avaliação 07-07-2010
Parte Prática (2ª Parte da matéria)
Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = \theta(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{\theta}(t)$
$q_2 = x(t) \rightarrow \dot{q}_2 = \dot{x}(t)$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} J_2 \left[\dot{x}(t)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times m_1 \times (4r)^2 \times \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times m_2 \times r^2 \times \left[\dot{x}(t)\right]^2 =$$

$$= \frac{16}{24} \times m_1 \times r^2 \times \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \left[\dot{x}(t)\right]^2$$

$$= \frac{2}{3} m_1 r^2 \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \left[\dot{x}(t)\right]^2 \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} k_1 (r \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (3r \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 (3r \operatorname{sen}\theta + x)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 9r^2\theta^2 + \frac{1}{2} k_3 (3r\theta + x)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial x}{\partial \theta} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 0 \frac{\partial x}{\partial x} = 0$$

Considerando as equações de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m_1 r^2 \dot{\theta}$ · $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta}$
- $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ · $\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_1 r^2\theta + 9k_2 r^2\theta + 3k_3 r(3r\theta + x)$
- $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{x}$ · $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{x}$
- $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ · $\frac{\partial V}{\partial x} = k_3 (3r\theta + x)$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + 9k_2)r^2 + 9k_3 r^2 & 3k_3 r \\ 3k_3 r & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta} + K_1 r^2 \theta + 9 K_2 r^2 \theta + 3 K_3 r (3r\theta + \ell) = f(t) \\ \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{x} + K_3 (3r\theta + x) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 r^2 + 9 K_2 r^2 + 9 K_3 r^2 & 3 K_3 r \\ 3 K_3 r & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Temos:

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix}$$

Fazendo:

$$\begin{bmatrix} 3000 - \omega^2 3 & -4000 \\ -4000 & 15000 - \omega^2 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Igualando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema homogéneo a zero, temos:

$$\begin{vmatrix} 3000 - 3\omega^2 & -4000 \\ -4000 & 15000 - 45\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 13{,}692 \left[\text{rad/s} \right] \quad \vee$$

$$\vee \quad \omega_2 = 33{,}851 \left[\text{rad/s} \right]$$

Então:

$$\left(3000 - 3 \times 13{,}692^2\right) \times u_1 - 4000 \times u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 1{,}641\, u_2 \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}641 \\ 1 \end{Bmatrix} //$$

$$\left(3000 - 3 \times 33{,}851^2\right) \times u_1 - 4000 \times u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = -9{,}139\, u_2 \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -9{,}139 \\ 1 \end{Bmatrix} //$$

c) $$X_2(\omega) = \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}$$

$$X_2(\omega) = \frac{(3000 - 3\times 20^2)\times 0 - (-4000)\times 0{,}5\times 100}{(3000-3\times 20^2)(15000 - 45\times 20^2) - (-4000)^2} =$$

$$= -0{,}00935 \text{ m}$$

d) Temos:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left(\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right)^{0,5}} \{u\}_1 =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0{,}22524 \\ 0{,}13726 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left(\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right)^{0,5}} \{u\}_2 =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0{,}53159 \\ 0{,}05817 \end{Bmatrix}$$

Então: $[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}692^2 & 0 \\ 0 & 33{,}851^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}22524 & -0{,}53159 \\ 0{,}13726 & 0{,}05817 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0{,}5\, f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 13{,}692^2\, \eta_1(t) = 0{,}5 \times 0{,}22524 \times f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 33{,}851^2\, \eta_2(t) = -0{,}53159 \times 0{,}5 \times f(t) \end{cases}$$

g) $$\eta_1(t) = 0{,}089535 \operatorname{sen}(2{,}5000\,\pi t) - 0{,}0005135 \operatorname{sen}(5\pi t)$$

$$\eta_2(t) = 0{,}0063301 \operatorname{sen}(2{,}5\,\pi t) - 0{,}0001687 \operatorname{sen}(5\pi t)$$

$$\theta(t) = 0{,}22524\,\eta_1(t) + 0{,}53160\,\eta_2(t)$$

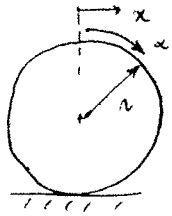
Exercício 1

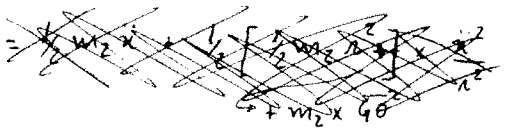
07/07/2010

Coordenadas generalizadas: $\dot{q}_1 = \dot{\theta}$ $\quad q_1 = \theta$

$\dot{q}_2 = \dot{x}$ $\quad q_2 = x$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times J_\theta^{barra} \times \dot{\theta}^2 =$





$= \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times J_\theta^{barra} \times \dot{\theta}^2 =$

$x = r \operatorname{sen} \alpha$

$x = r\alpha$

$\dot{x} = r\dot{\alpha}$

$= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} m_2 r^2\right] \times \frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{12} \times m_1 \times (4r)^2 + m_1 \times r^2\right] \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{16}{12} m_1 r^2 + m_1 r^2\right] \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{28}{12} m_1 r^2\right] \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{7}{6} m_1 r^2 \dot{\theta}^2$

Energia potencial:

$V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times (r\theta)^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times (x - 3r\theta)^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (x)^2$

$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (x^2 - 6r\theta x + 9r^2\theta^2) + \frac{1}{2} k_3 x^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 - 3r\theta k_2 x + 4{,}5 r^2 \theta^2 k_2 + \frac{1}{2} k_3 x^2$

Forças não conservativas: $Q_1 = f(t) \times 3r \frac{d\theta}{d\theta} + 0 = 3r f(t)$

$Q_2 = f(t) \times 3r \frac{d\theta}{dx} + 0 = 0$

Equações de Movimento:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{7}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta}$ $\qquad \frac{dV}{d\theta} = k_1 r^2 \theta - 3r k_2 x + 9r^2 \theta k_2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}$ $\qquad \frac{dV}{dx} = k_2 x + k_3 x - 3r\theta k_2$

$$\begin{cases} \frac{7}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta} + k_1 r^2 \theta - 3r k_2 x + 9r^2 \theta k_2 = 3r f(t) \\ \frac{3}{2} m_2 \ddot{x} + k_2 x + k_3 x - 3r\theta k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 r^2 + 9r^2 k_2 & -3r k_2 \\ -3r k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3r f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\det \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$

$$\left| \begin{matrix} 3000 - \omega^2 \times 3 & -4000 \\ -4000 & 15000 - \omega^2 \times 45 \end{matrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \underline{\omega_1 = 13,691961 \quad \vee \quad \omega_2 = 33,850607}$$

$$(-4000)u_1 + (15000 - \omega^2 \times 45)u_2 = 0 \xrightarrow{\omega_1} \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega_2} \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix}$$

---

c) $f(t) = 100 \cos(20t)$

$0,5\, f(t) = 50 \cos(20t)$

$z_{11} = -\omega^2 m_{11} + k_{11} = -20^2 \times 3 + 3000 = 1800$

$z_{12} = -\omega^2 m_{12} + k_{12} = -20^2 \times 0 + (-4000) = -4000$

$z_{22} = -\omega^2 m_{22} + k_{22} = -20^2 \times 45 + 15000 = -3000$

$z_{21} = -\omega^2 m_{21} + k_{21} = -20^2 \times 0 + (-4000) = -4000$

$$X_1(\omega) = \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{1800 \times 0 - (-4000) \times 50}{1800 \times (-3000) - (-4000) \times (-4000)} = -0,009346$$

---

d) $\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \{u\}_1 \Rightarrow \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,225237 \\ 0,137259 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0,531602 \\ -0,058156 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13,691961^2 & 0 \\ 0 & 33,850607^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,225237 & 0,531602 \\ 0,137259 & -0,058156 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0,5\, f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

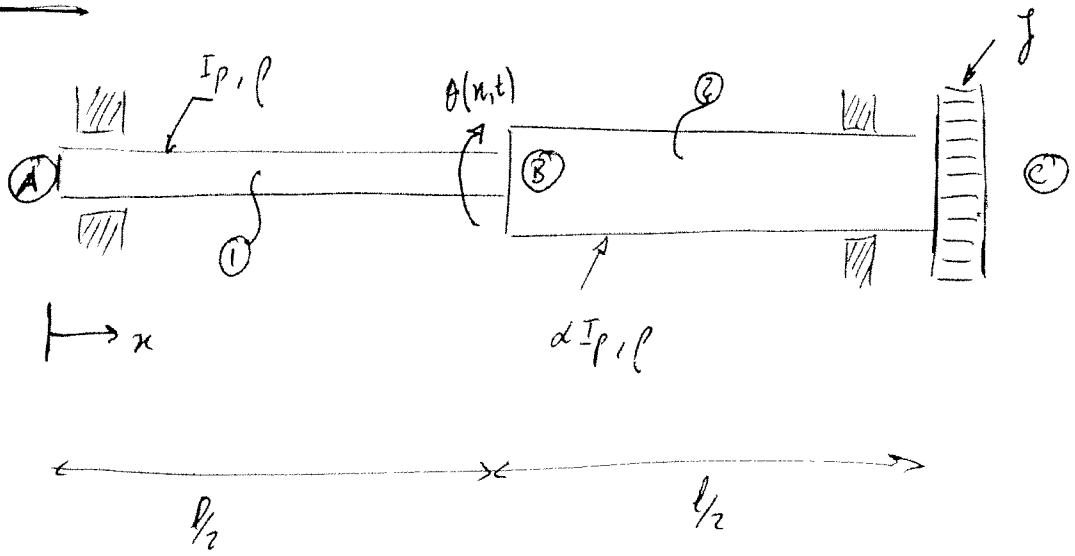
$$= \begin{Bmatrix} 0,225237 \times 0,5 \times f(t) \\ 0,531602 \times 0,5 \times f(t) \end{Bmatrix}$$

---

e) $f(t) = \begin{cases} 100 \sin\left(\frac{\pi}{0,4} t\right) & 0 < t \leq 0,4\,s \\ 0 & t > 0,4\,s \end{cases}$

Exercício 2:

07/07/2010



①	$0 \le x \le \ell/2$	②	$\ell/2 \le x < \ell$
	I_p		αI_p
	$\ell/2$		G
	ρ		$\ell/2$
	G		ρ

Volante: $J = \beta \rho I_p \ell$

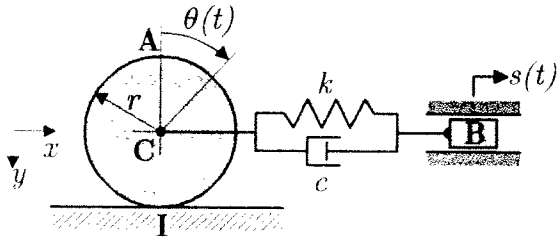
a) $\theta_1(x) = \delta \cos \frac{\pi}{\ell} x$ $\quad$ $\theta_2(x) = \delta \cos \frac{2\pi}{\ell} x$ $\quad \Rightarrow$ Aproximações para a forma natural fundamental da torção

Condições de fronteira:

Extremidade (A): $G I_p \left. \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ $\quad \Leftarrow$ Condição

A meio do veio (B): $\left| \begin{array}{l} G I_p \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x} = G I_p \frac{\theta_2(x,t)}{\partial x} \\ \theta(x=\ell/2^-) = \theta(x=\ell/2^+) \end{array} \right.$

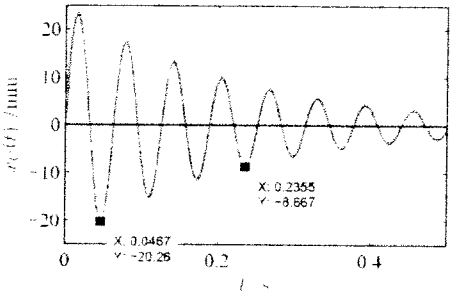
Extremidade (C): $G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$



1) (4 val.) 1) O disco, de raio $r = 0.1$ m e massa m ($J_C = \frac{1}{2}mr^2$) representado na figura, rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O disco encontra-se ligado a um conjunto mola-amortecedor de constantes k e c, respectivamente, e submetido a uma excitação passiva $s(t)$. Para $\theta(t) = 0$ e $s(t) = 0$, a mola não está deformada.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento do sistema;

✓b) (15%) Num ensaio em regime livre, $s(t) = 0$, o deslocamento linear do ponto **C** está representado na figura. Determinar a razão de amortecimento e a frequência natural não amortecida;



Para resolver as alíneas seguintes, considerar a equação do movimento:

$$0.6\ddot{\theta}(t) + 5.4\dot{\theta}(t) + 6000\,\theta(t) = 5.4\dot{s}(t) + 6000\,s(t)$$

sendo a excitação passiva harmónica $s(t) = S\cos(\omega t)$, com amplitude igual a 5 mm e frequência igual a 90 rad/s.

Determinar:

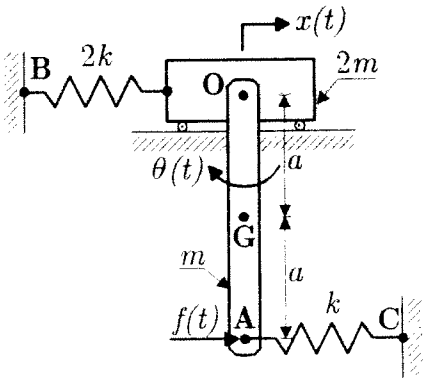
✓c) (15%) a amplitude do deslocamento $X_C(\omega)$ do ponto **C** do disco;

d) (20%) a amplitude F_T da força transmitida ao disco no ponto **C**;

✓e) (10%) A frequência de ressonância e a correspondente amplitude do ponto **C**;

f) (15%) para c=0, estabelecer a gama de frequências de excitação para as quais a amplitude $X_C(\omega)$ do deslocamento do ponto **C** não ultrapassa o valor calculado na alínea c).

v.s.f.f.



2)(4 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $x(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco de massa $2m$ e uma barra de massa m e comprimento $2a$ ($J_G = \frac{1}{12}m(2a)^2$). O bloco encontra-se ligado ao exterior através de uma mola de rigidez $2k$. A barra roda relativamente ao bloco em torno do ponto **O** e está ligada ao exterior no ponto **A** através de uma mola de rigidez k.

Para $\theta(t) = 0$ rad e $x(t) = 0$ m, as molas não estão deformadas.

a) (35%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 2f(t) \end{Bmatrix}$$

b) (25%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

d) (25%) Determinar uma estimativa para o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 10\sin\left(\frac{\pi}{0.4}t\right) & 0 < t \le 0.4\text{s} \\ 0 & t > 0.4\text{s} \end{cases}$$

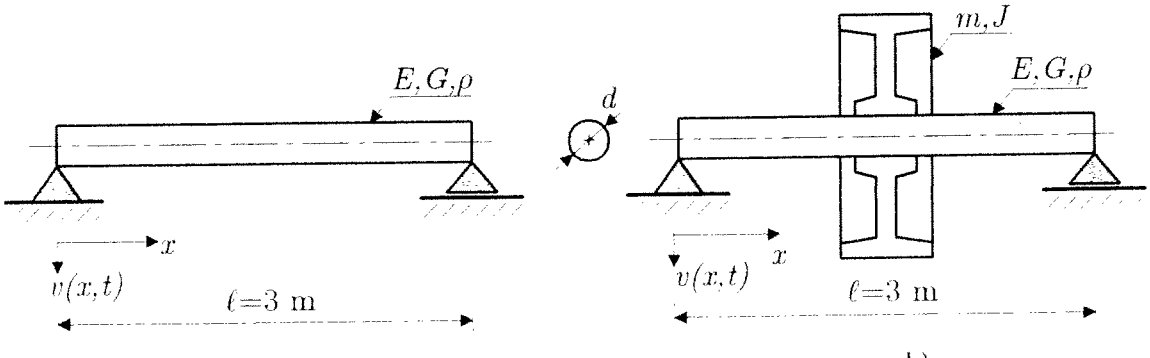
3) (4 val.) A figura a) representa um veio de comprimento $\ell = 3$ m e simplesmente apoiado para a flexão e livre-livre para a torção. O material do veio (aço) apresenta um módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa e transversal $G = 80$ GPa, e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja igual a 25 Hz.

Se, a meio vão do veio for montado um volante de massa $m = 680$ kg e momento polar de inércia $J = 263$ kgm^2, conforme se representa na figura b),

b) (40%) determinar uma estimativa da nova frequência natural fundamental de flexão do sistema veio-volante;

c) (30%) determinar a frequência natural de torção do sistema veio-volante.

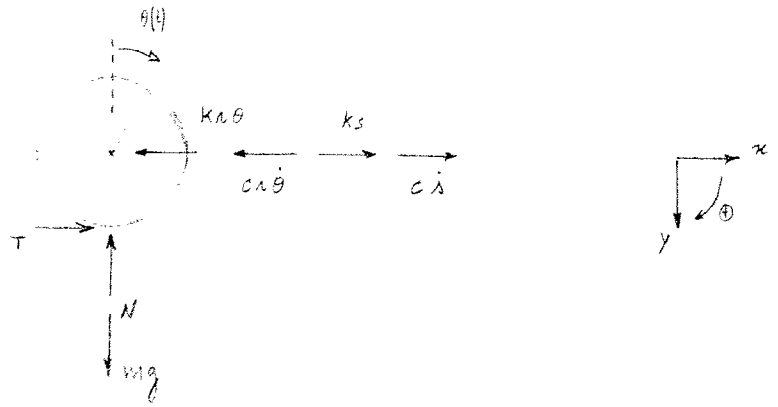


Exame de Recurso de 22-07-2010
Vibrações e Ruído

Estudo para fim de curso

Exercício 1

a) Diagrama de corpo livre:



Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_I = \vec{K}_I \quad \therefore$$

$$\therefore -\lambda \times \left(K\lambda\theta + c\lambda\dot{\theta} \right) + \lambda \left(Ks + c\dot{s} \right) = \overset{Steiner}{J_I} \times \ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \; -K\lambda^2\theta - c\lambda^2\dot{\theta} + \lambda Ks + \lambda c\dot{s} = \left(\tfrac{1}{2} \times m \times \lambda^2 + m \times \lambda^2 \right) \ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \; \tfrac{3}{2} m\lambda^2 \ddot{\theta}(t) + c\lambda^2 \dot{\theta}(t) + K\lambda^2 \theta(t) = K\lambda s + c\lambda\dot{s}$$

b) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{3} \ln \frac{-20,26}{-8,669} = 0,283042$$

Rácio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta^2}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,283042^2}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,283042^2}} = 0,045002$$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0,2355 - 0,0467}{3} = 0,062933 \; s$$

Frequência natural amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0,062933} = 99,839278 \text{ rad/s}$$

Frequência natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{99,839278}{\sqrt{1-0,045002^2}} = 99,940528 \text{ rad/s}$$

c) Equação do movimento:

$$0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 5,4\ \dot{s}(t) + 6000\ s(t)$$

Excitação passiva harmônica:

$$s(t) = S \cos(\omega t) \quad , \quad S = 5 \text{ mm} \quad \text{e} \quad \omega = 90 \text{ rad/s}$$

$$\dot{s}(t) = -S\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Então, a equação do movimento fica:

$$0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 5,4 \times (-0,005 \times 90 \times \operatorname{sen}(\omega t) + 6000 \times (0,005 \cos \omega t) \quad (=)$$

$$(=)\ 0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 0,005 \times \sqrt{6000^2 + (90 \times 5,4)^2} \cos(\omega t + \gamma) \quad (=)$$

$$(=)\ 0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 30,098254 \cos(\omega t + \gamma)$$

Resposta estacionária ou permanente do sistema:

$$\theta(t) = \textcircled{H}(\omega) \times \cos(\omega t + \gamma - \phi) \quad (=)$$

$$(=)\ \theta(t) = Y \times TR_{abs} \times \cos(\omega t + \gamma - \phi) =$$

$$(=)\ \theta(t) = Y \times \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \cos(\omega t + \gamma - \phi)$$

Transmissibilidade de deslocamento:

$$TR_{abs} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0,045 \times 0,9)^2}}{\sqrt{(1-0,9^2)^2 + (2 \times 0,045 \times 0,9^2}} = 4,857407$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{90}{\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}} = \frac{90}{\sqrt{\frac{6000}{0,6}}} = 0,9$$

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} = \frac{5,4}{2 \times 0,6 \times \sqrt{\frac{6000}{0,6}}} = 0,045$$

Os valores de γ e ϕ são:

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\omega c}{k} = \tan^{-1} \frac{90 \times 5,4}{6000} = 0,080824 \quad rad$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,045 \times 0,9}{1 - 0,9^2} = 0,402985 \quad rad$$

A equação da resposta é então:

$$\theta(t) = 0,005 \times 4,857407 \times \cos(90t + 0,080824 - 0,402985) =$$

$$= \underbrace{0,024287}_{\Theta(\omega)} \times \cos(90t - 0,322161)$$

A amplitude de deslocamento do ponto C, $X_C(\omega)$:

$$X_C(\omega) = A \times \Theta(\omega) = 0,1 \times 0,024287 = 0,0024287 \quad m$$

d)

Os valores de γ e ϕ são:

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k} \quad \therefore \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{90 \times 5,4}{6000} = 0,080824$$

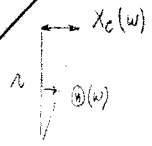
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\gamma\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{2 \times 0,045002 \times 0,900536}{1 - 0,900536^2} = 0,405056$$

Temos então que a resposta vale:

$$\theta(t) = 5\times10^{-3} \times 4,877903 \times \cos(90t + 0,080824 - 0,405056) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = \underbrace{0,024390}_{\Theta(\omega)} \times \cos(90t - 0,324232)$$

A amplitude de deslocamento do ponto C, $X_c(\omega)$ é então:



$$X_c(\omega) = \lambda \times \Theta(\omega) = 0,1 \times 0,02439 = 0,002439 \text{ mm}$$

e)

- $\beta_1 = \frac{1}{2\gamma}\left[\sqrt{1+8\gamma^2}-1\right]^{1/2} = \frac{1}{2\times0,045}\left[\sqrt{1+8\times0,045^2}-1\right]^{1/2} =$

$= 0,997989$

- $\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} \Rightarrow 0,997989 = \frac{\omega_1}{100} \Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = 99,7989 \text{ rad/s}}$

$$TR_{abs} = \frac{\sqrt{1+(2\gamma\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\gamma\beta)^2}} \Rightarrow TR_{abs} = \frac{\sqrt{1+(2\times0,45\times0,997989)^2}}{\sqrt{\left(1-0,997989^2\right)^2+\left(2\times0,045\times0,997989\right)^2}}$$

$\Leftrightarrow TR_{abs} = 11,167152$

$\Theta(\omega) = \gamma$ Trans.

$$\Theta(\omega) = \underbrace{11,167152}_{TR_{abs}} \times 0,005 = 0,055836$$

$$X_c(\omega) = 0,1 \times 0,055836 = 0,0055836 \text{ m} \;//$$

d) $F = m \times \ddot{\theta}$

$-f$

$f_T = k_1\theta + c_1\dot{\theta} - Ks - c\dot{s}$

$= m\ddot{\theta}$

$\rightarrow \theta \leftarrow \leftarrow$

$ma \quad f_k \quad f_c$

$f_T = f_k + f_c$

sensor

ma

$f_T = m\ddot{\theta}$

$m_c =$ (kg)

$F_T = c(\dot{s}(t) - \dot{\theta}R)$

$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} r\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dF_T}{d\dot{\theta}}\right)$

$\vec{\theta_c} = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$F_T = c\ddot{\theta}R$

$a = \frac{d^2}{dt^2}(x)$

$N \qquad x = \theta r$

$kg\ m/s^2 \qquad a = \ddot{\theta} r$

$x = \theta r$

$\frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(\theta r)$

$\dot{x} = \dot{\theta} r$

$\ddot{x} = \ddot{\theta} r$

$\frac{dT}{d\dot{\theta}} = J_1 \dot{\theta}_1$

$\frac{dT}{d\theta}$

d

~~$F_T = c\dot{s}(t) - c\dot{\theta}tlR$~~

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dF_t}{d\dot{\theta}}\right) = c\ddot{\theta}r$

d $\quad c\dot{\theta}R$

f) $X_c(\omega) < 0{,}022\ m$

$$X_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = 0{,}004595$$

$$\mu = \frac{X_c(\omega)}{X_s} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$X_s \cdot \frac{1}{|1-\beta^2|} = X_c(\omega)$$

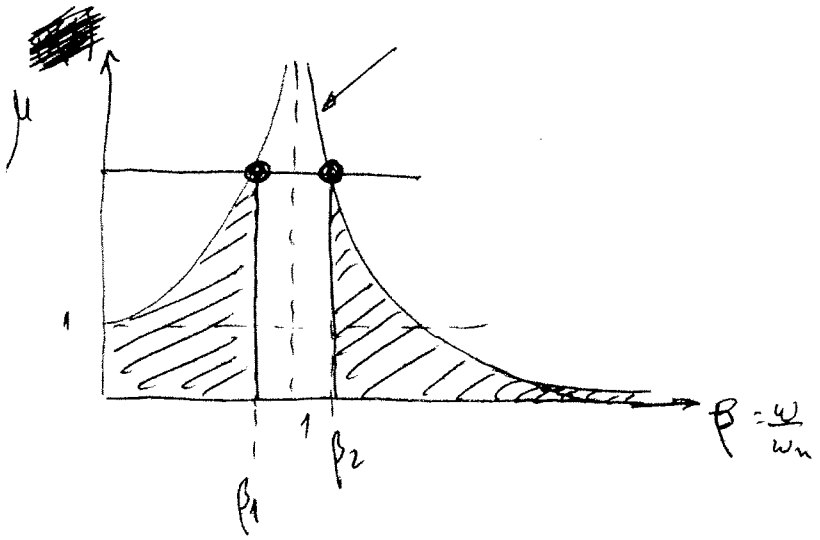
$$X_c(\omega) < 0{,}022$$

$$X_s \cdot \frac{1}{|1-\beta^2|} < 0{,}022 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0{,}889458 \\ \beta_2 = 1{,}099483 \end{cases}$$

X_s: $0{,}004595$

$\omega_1 = \beta_1 \omega_n \Rightarrow \omega_1 = 0{,}889458 \times 99{,}940528 \Rightarrow \omega_1 = 88{,}8929\ rad/s$

$\omega_2 = \beta_2 \omega_n \Rightarrow \omega_2 = 109{,}882912\ rad/s$



$\omega < 88{,}8929\ rad/s \quad \omega > 109{,}882912\ rad/s$

Exame de Recurso de 22-07-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x(t)$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}(t)$
$q_2 = \theta(t)$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times 2m \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times m \times (\dot{x} - a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \times J_G \times \dot{\theta}^2 =$

$= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2\dot{x}a\dot{\theta} + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m (2a)^2 \times \dot{\theta}^2 =$

$= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - ma\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} ma^2\dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 - ma\dot{x}\dot{\theta} + \frac{2}{3} ma^2\dot{\theta}^2$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times 2K \times x^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x + 2a\theta)^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 2K \times x^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x^2 + 4xa\theta + 4a^2\theta^2) =$

$= Kx^2 + \frac{1}{2} Kx^2 + 2Kxa\theta + 2Ka^2\theta^2 =$

$= \frac{3}{2} Kx^2 + 2Kax\theta + 2Ka^2\theta^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t) \times (\delta x - 2a\,\delta\theta) =$

$= f(t)\,\delta x - 2a\, f(t)\delta\theta$

$Q_1 = f(t) \frac{dx}{dx} - 2a\, f(t) \frac{d\theta}{dx} = f(t)$

$Q_2 = f(t) \frac{dx}{d\theta} - 2a\, f(t) \frac{d\theta}{d\theta} = -2a\, f(t)$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x} - ma\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Kx + 2Ka\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = -ma\ddot{x} + \frac{1}{3} ma^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2Kax + 4Ka^2\theta$

$$\begin{cases} 3m\ddot{x} - ma\ddot{\theta} + 2Kx + 2Ka\theta = f(t) \\ -ma\ddot{x} + \frac{1}{3} ma^2\ddot{\theta} + 2Kax + 4Ka^2\theta = -2a\, f(t) \end{cases}$$

Na forma matricial, as equações de Lagrange apresentam-se:

$$\begin{bmatrix} 3m & -ma \\ -ma & \frac{1}{3}ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & 2Ka \\ 2Ka & 4a^2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ -2af(t) \end{Bmatrix}$$

b) Frequências naturais de vibração:

$$\text{let} \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \det \left| \begin{bmatrix} 15000 - \omega^2 \times 60 & -10000 - \omega^2 \times (-20) \\ -10000 - \omega^2 \times (-20) & 10000 - \omega^2 \times 30 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (=)$$

(=) $\omega_1 = 9{,}865312 \text{ rad/s}$ $\quad \omega_2 = 19{,}156235 \text{ rad/s}$

Formas naturais de vibração:

$$\left(-10000 - \omega_1^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - \omega_1^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(-10000 - 9{,}865312^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - 9{,}865312^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

(=) $u_2 = 1{,}137459\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix}$

$$\left(-10000 - \omega_2^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - \omega_2^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(-10000 - 19{,}156235^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - 19{,}156235^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

(=) $u_2 = -2{,}637458\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}637458 \end{Bmatrix}$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}136953 \\ 0{,}155778 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 50 & -20 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,051696 \\ -0,136346 \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136953 & 0,051696 \\ 0,155778 & -0,136346 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 2f(t) \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(=) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,136953\, f(t) + 2 \times 0,155778 \times f(t) \\ 0,051696\, f(t) + 2 \times (-0,136346) \times f(t) \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(=) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,448509\, f(t) \\ -0,220996\, f(t) \end{Bmatrix}$$

d) Temos as equações na base modal:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 9,865312^2\, \eta_1(t) = 0,448509 \times 10 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{0,4} t\right) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 19,156235^2\, \eta_2(t) = -0,220996 \times 10 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{0,4} t\right) \end{cases} \quad (=)$$

$$(=) \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 9,865312^2\, \eta_1(t) = 4,48509 \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{0,4} t \\ \ddot{\eta}_2(t) + 19,156235^2\, \eta_2(t) = -2,20996 \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{0,4} t \end{cases}$$

Pressamos de:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \therefore \quad T_1 = \frac{2\pi}{9,865312} = 0,636897 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_c}{T_1} = \frac{0,4}{0,636897} = 0,628045$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \therefore \quad T_2 = \frac{2\pi}{19,156235} = 0,327997 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_c}{T_2} = \frac{0,4}{19,156235} = 1,219523$$

$$\frac{F_1}{K_1} = \frac{F_1}{\omega_1^2} = \frac{4,48509}{9,865312^2} = 0,046084$$

$$\frac{F_2}{K_2} = \frac{F_2}{\omega_2^2} = \frac{-2,20996}{19,156235^2} = -0,006022$$

Pelo gráfico do espectro de resposta ao choque meia onda seno :

$$\eta_1^{max} \times \frac{1}{F_1/K_1} = 1,7 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_1^{max} = 1,7 \times 0,046084 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_1^{max} = 0,078343$$

$$\eta_2^{max} \times \frac{1}{F_2/K_2} = 1,65 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_2^{max} = 1,65 \times 0,006022 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_2^{max} = 0,009936$$

Então, o valor de $x(t)^{máx}$ é :

$$x(t)^{max} = \phi_{11}\, \eta_1(t)^{max} + \phi_{12}\, \eta_2(t)^{max} =$$

$$= 0,136953 \times 0,078343 + 0,051696 \times 0,009936 =$$

$$= 0,011243$$

Exame de Recurso de 22-07-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

a) Comprimento: $\ell = 3\,m$
Simplesmente apoiado para a flexão
Livre-livre para a torção
Módulo de elasticidade longitudinal: $E = 210\,GPa$
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80\,GPa$
Massa volúmica: $\rho = 7800\ kg/m^3$

Secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja igual a 25 Hz:

$$f_1 = 25\ Hz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 25 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi}\sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi \times d^4}{64}}{7800 \times \frac{\pi \times d^2}{4} \times 3^4}} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}110423\ m$$

b) Massa do volante: $m = 580\,kg$
$\rho_m = 2613\ kg/m^3$

Função de aproximação: $V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$

A função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, pois é metade da ordem do problema.

$$\frac{d}{dx}V(x) = \frac{\delta\pi}{\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell} \qquad \frac{d^2}{dx^2}V(x) = -\frac{\delta\pi^2}{\ell^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}$$

Condições de fronteira:

$$V(0) = \operatorname{sen}\frac{\pi \times 0}{\ell} = 0$$

$$V(\ell) = \operatorname{sen}\frac{\pi \ell}{\ell} = 0$$

A forma natural fundamental é:



$n = 1$

$$V(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

Método da energia de Rayleigh:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} E I(x) \left[\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right]^2 dx + V_{cfn} =$$

$$= \frac{1}{2} E I \int_0^{\ell} \left[-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \right]^2 dx + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} E I \times \left[\frac{\pi^4 \delta^2}{2 \ell^3} \right] =$$

$$= \frac{E I \pi^4 \delta^2}{4 \ell^3}$$

$$T_{máx} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho A(x) \left[V(x) \right]^2 dx + T^*_{cfn} \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell} \left(\delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \times \frac{\ell \delta^2}{2} + \frac{1}{2} m \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho A \ell \delta^2}{4} + \frac{m \delta^2}{2} \right]$$

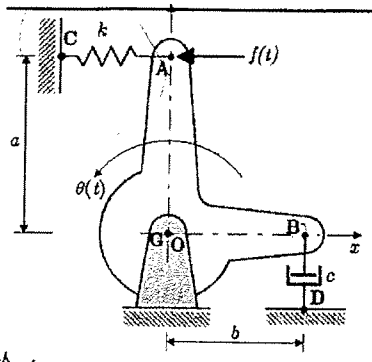
$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{\delta^2 \rho A \ell}{4} + \frac{m \delta^2}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} = \frac{\frac{E I \pi^4 \delta^2}{4 \ell^3}}{\frac{\delta^2 \rho A \ell}{4} + \frac{m \delta^2}{2}} = \frac{E I \pi^4 \cancel{\delta^2} \cancel{4}}{4 \ell^4 \cancel{\delta^2} \rho A} + \frac{E I \pi^4 \cancel{\delta^2} 2}{4 \ell^3 m \cancel{\delta^2}} =$$

$$= \frac{E I \pi^4}{\ell^4 \rho A} + \frac{E I \pi^4}{2 \ell^3 m} = E I \pi^4 \left(\frac{1}{\ell^4 \rho A} + \frac{1}{2 \ell^3 m} \right)$$

O valor de ω é então:

$$\omega = \left[210 \times 10^9 \times \pi^4 \times \left(\frac{1}{3^4 \times 7800 \times \frac{\pi \times 0{,}110423^2}{4}} + \frac{1}{2 \times 3^3 \times 680} \right) \right]^{1/2} = 62753{,}179825 \text{ rad/s}$$



1) (4 val.) A peça em forma de **L** representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A peça está ligada ao exterior, através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da peça em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.

Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 3200$ N/m $\quad c = 40$ Ns/m $\quad J = 0.1$ kgm^2 $\quad a = 0.15$ m $\quad b = 0.15$ m

determinar:

b) (10%) A razão de amortecimento;

c) (10%) A frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10°$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, determinar,

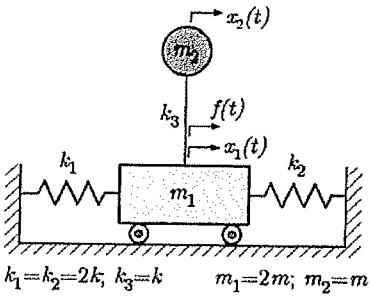
d) (15%) a energia dissipada até ao instante $t = 0.5$ s.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 50 N e uma frequência de 5 Hz, determinar:

e) (15%) a resposta estacionária do sistema;

f) (15%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**;

g) (15%) redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a amplitude da força transmitida ao apoio **C** seja inferior a 50 N.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera, respectivamente.

a) (20%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para resolver as alíneas seguintes, utilizar as equações de movimento seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

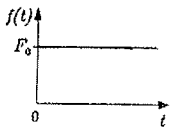
Para $k = 200$ Nm^{-1} e $m = 2$ kg,

c) (20%) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4$ rads^{-1}.

d) (10%) Se $f(t) = F\cos\omega t$, determinar a frequência de excitação ω para a qual o sistema barra/esfera actua como um absorsor de vibrações.

e) (10%) Escrever as equações de movimento do sistema na base modal.

f) (20%) Determinar uma estimativa do valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura.



v.s.f.f.

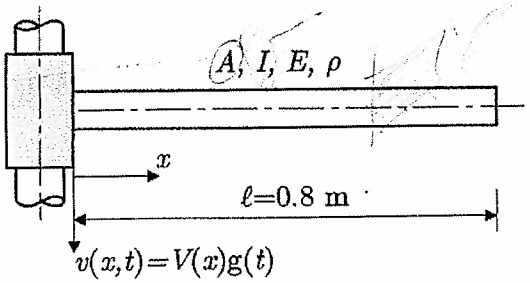
3) (4 val.) A figura a) representa um braço de robot para movimentação de peças. O braço apresenta um comprimento $\ell = 0.8$ m e uma secção recta circular constante. O material do braço possui módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Para a análise da flexão do braço, considere-se a extremidade $x = 0$ fixa.

a) (40%) Dimensionar a recção recta do braço de modo que a frequência natural de flexão seja igual a 35 Hz.

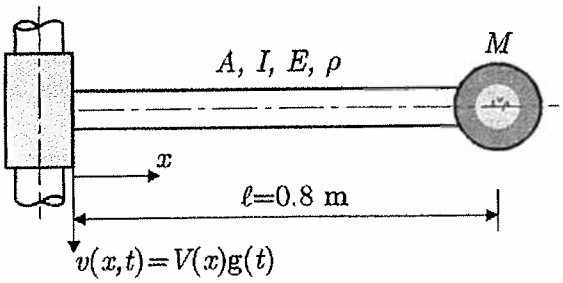
A figura b) representa o braço com uma peça de massa M concentrada na extremidade $x = \ell$.

Considerando o método da energia de Rayleigh e a família de funções $V_i(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^i \quad i = 1,\ldots,\infty$,

b) (20%) seleccionar, justificando, uma função de aproximação adequada;
c) (20%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão;
d) (20%) determinar o valor da frequência natural de flexão para M igual a 25% da massa do braço.



a)

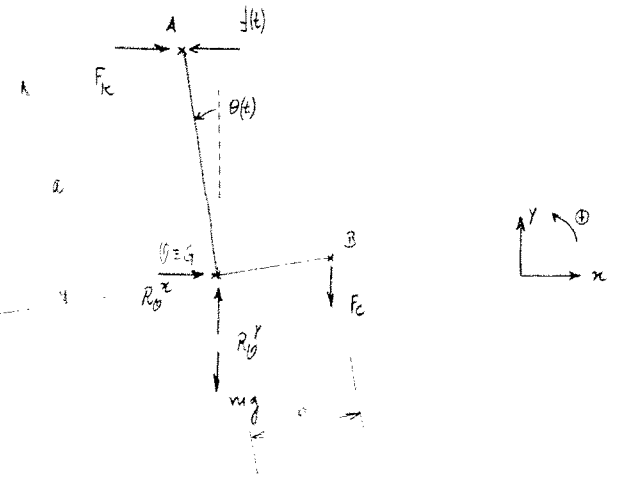


b)

Feup, 28.09.2010
José Dias Rodrigues

Exercício 1

a) Quando perturbamos o sistema temos:



Distâncias:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\,\text{sen}\,\theta \\ +a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ +a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OB} = \begin{Bmatrix} b \\ +b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidades:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{OB}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Forças resistentes:

$$\vec{F}_k = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_c = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ +b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + \underbrace{\vec{v}_G}_{=0} \times \vec{Q}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{\Pi}_{/O} = \vec{K}_{/O} \quad \therefore$$

$$\vec{OA} \times \left(\vec{F_k} + \vec{f}(t) \right) + \vec{OB} \times \vec{F_c} = \vec{K}_{/O} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow -ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + ka^2\theta(t) = a f(t)$$

b) Frequência natural não amortecida, ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3200 \times 0{,}15^2}{0{,}1}} = 26{,}832816 \ rad/s$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{40 \times 0{,}15^2}{2 \times 0{,}1 \times 26{,}832816} = 0{,}167705$$

c) Frequência angular amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 26{,}832816 \times \sqrt{1 - 0{,}167705^2} = 26{,}452789 \ rad/s$$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{26{,}452789} = 0{,}237524 \ s$$

d) No instante inicial, $t = 0s$:

$$E_p = \frac{1}{2} \times k \times x^2 \quad \therefore \quad E_p = \frac{1}{2} \times 3200 \times \left(0{,}15 \times \frac{10 \times \pi}{180} \right)^2 = 1{,}096623 \ J$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times m \times \underbrace{\dot{x}^2}_{=0} + \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}^2 \quad \therefore \quad E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 0 = 0 \ J$$

porque o ponto G é fixo

Para o instante $t = 0,5\ s$:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad , \text{ onde :}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad e \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} \quad , \text{ sendo :}$$

$$A_1 = \theta_0 \qquad e \qquad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_d}$$

Então :

$$A_1 = \frac{10 \times \pi}{180} = 0,174533$$

$$A_2 = \frac{0 + 0,167705 \times 26,832816 \times 0,174533}{26,452789} = 0,029691$$

$$A = \sqrt{0,174533^2 + 0,029691^2} = 0,177040$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0,029691}{0,174533} = 0,168504$$

$$\theta(t=0,5s) = 0,177040 \times e^{-0,167705 \times 26,832816 \times 0,5} \cos(26,452789 \times 0,5 - 0,168504) = 0,016451\ rad$$

$$\dot{\theta}(t) = A\, e^{-\zeta \omega_n t}\, \omega_n \cos(\omega_d t - \phi - \psi) \quad , \text{ onde : } \psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Então:

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 0,167705^2}}{0,167705} = 1,402295$$

$$\dot{\theta}(t=0,5s) = 0,177040 \times e^{-0,167705 \times 26,832816 \times 0,5} \times 26,832816 \times \cos(26,452789 \times 0,5 - 0,168504 - 1,402295) =$$

$$= 0,306995\ rad/s$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times k \times x^2 \quad \therefore \quad E_p = \frac{1}{2} \times 3200 \times (0,15 \times 0,016451)^2 = 0,009743\ J$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times m \times \cancel{\dot{x}^2}^{\,=0} + \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}^2 \quad \therefore \quad E_c = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 0,306995^2 = 0,004712\ J$$

Energia dissipada até ao instante $t = 0,5\ s$:

$$E_d = E_0 - E_{t=0,5s} = (E_{p_0} + E_{c_0}) - (E_{p_{t=0,5s}} + E_{c_{t=0,5s}}) =$$

$$= 1,096623 - (0,009743 + 0,004712) = 1,082168\ J$$

e) Para uma solicitação harmónica, a resposta permanente é:

$$\theta_p(t) = \Theta_s \, \mu \cos(\omega t - \phi) \quad , \text{ onde:}$$

$$\Theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \Theta_s = \frac{0{,}15 \times 50}{3200 \times 0{,}15^2} = 0{,}104167$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = 5 \times 2\pi \times \frac{1}{26{,}832816} = 1{,}170802$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}170802^2)^2 + (2 \times 0{,}167705 \times 1{,}170802)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu = 1{,}851572$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}167705 \times 1{,}170802}{1 - 1{,}170802^2} = -0{,}814103 \text{ rad}$$

Temos então:

$$\theta_p(t) = 0{,}104167 \times 1{,}851572 \times \cos(10\pi t + 0{,}814103) =$$

$$= 0{,}192873 \cos(10\pi t + 0{,}814103)$$

f) Frequência de ressonância:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 26{,}832816 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}167705^2} = 26{,}067222 \text{ rad/s}$$

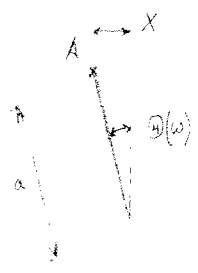
Amplitude máxima da resposta no ponto A:

$$\mu_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}167705 \times \sqrt{1 - 0{,}167705^2}} = 3{,}024258$$

$$\Theta(\omega) = \Theta_s \times \mu \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = 0{,}104167 \times 3{,}024258 = 0{,}315028$$

No ponto A fica:

$$X = a \times \text{sen}\, \Theta(\omega) \quad \therefore \quad X = 0{,}15 \times \text{sen}\, 0{,}315028 = 0{,}046476 \text{ m}$$



Exame de Conclusão de Curso de 28-09-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas:

$$q_1 = x_1(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{x}_1(t)$$
$$q_2 = x_2(t) \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{x}_2(t)$$

Note-se que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são deslocamentos absolutos.

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \times 2m \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m \times \dot{x}_2^2 =$$
$$= m\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (x_2 - x_1)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \times 2k \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times 2k \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k \times (x_2 - x_1)^2 =$$
$$= 2kx_1^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t)\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + 0\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + 0\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 0$$

Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = 4kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1)$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 4Kx_1 + K(x_2 - x_1) = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 4Kx_1 + Kx_2 - Kx_1 = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3Kx_1 + Kx_2 = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5K - \omega^2 2m & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = 1{,}66757 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \vee$$

$$\vee \quad \omega_1 = 0{,}84807 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Segunda forma natural:

$$(5K - \omega_1^2 \times 2 \times m)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(5K - 1{,}66757^2 \frac{K}{m} \times 2 \times m\right) u_1 - K u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5K - 5{,}56158\,K)\, u_1 - K u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}56158\, K u_1 = K u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{-0{,}56158} u_2 \Leftrightarrow u_1 = -1{,}78069\, u_2$$

Então: $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}78069 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Primeira forma natural:

$$(5K - \omega_2^2 \times 2 \times m)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(5K - 0{,}84807^2 \frac{K}{m} \times 2 \times m\right) u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5K - 1{,}43845\,K)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}56155\,K\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}56155\,K\, u_1 = K u_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3{,}56155} u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0{,}28078\, u_2$$

Então: $\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}28078 \\ 1 \end{Bmatrix}$

c) Considerando: $f(t) = F \cos \omega t$ e $\omega = 14{,}4\ rad/s$

$k = 200\ N/m$ e $m = 2\ kg$

As equações do movimento:

$$\begin{bmatrix} 2\times2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\times200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A amplitude $X_1(\omega)$ é dado por:

$$X_1(\omega) = \frac{(K_{22} - \omega^2 m_2) F}{(K_{11} - \omega^2 m_1)(K_{22} - \omega^2 m_2) - (K_{12})^2}$$

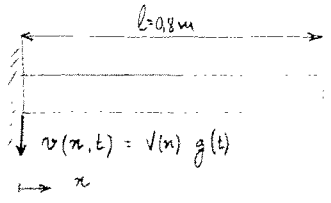
$$\therefore X_1(\omega) = \frac{(200 - 14{,}4^2 \times 2) F}{(1000 - 14{,}4^2 \times 2 \times 2)(200 - 14{,}4^2 \times 2) - (-200)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 0{,}0028\, F$$

Exercício 3

a) Comprimento: $l = 0{,}8$ m
Secção reta circular
Módulo de elasticidade: $E = 210$ GPa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3

Esquematicamente, temos:



Condições de fronteira: fixa - livre

$\beta_1 l = 1{,}8751$

$\alpha_n = 0{,}7341$

Então:

$$f_1 = 35 \quad (=)$$

$$(=) \quad (\beta_1 l)^2 \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 35 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 1{,}8751^2 \times \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi d^4}{64}}{7800 \times \frac{\pi d^2}{4} \times 0{,}8^4}} = 35 \quad (=)$$

$$(=) \quad d = 0{,}030859 \text{ m}$$

b) Família de funções: $V(x) = \delta \left(\frac{x}{l}\right)^i$, $i = 1 \ldots \infty$

Problema de flexão, logo a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, que é metade da ordem do problema (4ª ordem).

Para que seja verificada a condição de derivável pelo menos 2 vezes, então $i = 2$.

$$V(x) = \delta \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = \frac{2\delta x}{l^2} \qquad \frac{d^2}{dx^2} V(x) = \frac{2\delta}{l^2}$$

Verificando as condições de fronteira, temos:

$$x = 0 \quad \therefore \quad v(0) = \delta \left(\frac{0}{\ell}\right)^2 = 0$$

$$x = \ell \quad \therefore \quad v(\ell) = \delta \left(\frac{\ell}{\ell}\right)^2 = \delta$$

c) Método da energia de Rayleigh : vibrações de flexão de vigas

$$\cdot \; V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{cfg} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{2\delta}{\ell^2}\right)^2 dx + 0 =$$

$$= EI \, \frac{2\delta^2}{\ell^3}$$

$$\cdot \; T_{máx} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \, (v(x))^2 \, dx + T^*_{cfg} \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\delta \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times M \times \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \times \rho \times A \times \frac{\delta^2 \ell}{5} + \frac{1}{2} M \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2 \right]$$

$$\cdot \; T_{máx} = \omega^2 \, T^* \quad (=)$$

$$(=) \; T^* = \frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2$$

$$\cdot \; \omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} \quad \therefore \quad \omega^2 = \frac{EI \, \frac{2\delta^2}{\ell^3}}{\frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2} \quad (=)$$

$$(=) \; \omega^2 = \frac{20 EI \, \delta^2}{\rho A \delta^2 \ell^4} + \frac{4 EI \, \delta^2}{M \ell^3 \delta^2} \quad (=) \quad \omega = \left[\frac{20EI}{\rho A \ell^4} + \frac{4EI}{M \ell^3} \right]^{1/2}$$

d) Massa do braço:

$$M_{braço} = \frac{\pi \times d^2}{4} \times l \times \rho = \frac{\pi \times 0{,}030859^2}{4} \times 0{,}8 \times 7800 = 4{,}667004 \text{ kg}$$

Massa da massa concentrada

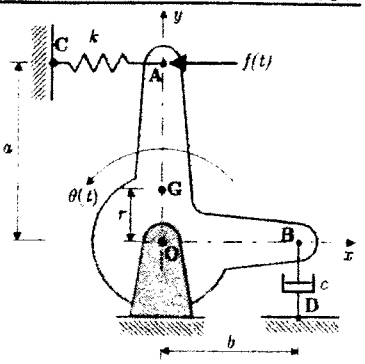
$$M_M = 0{,}25 \times M_{braço} = 0{,}25 \times 4{,}667004 = 1{,}166751 \text{ kg}$$

Então:

$$\omega = \frac{80 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0{,}030859^4 \times 4}{64 \times 7800 \times \pi \times 0{,}030859^2 \times 0{,}8^4} + \frac{4 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0{,}030859^4}{64 \times 1{,}166751 \times 0{,}8^3} =$$

$$= 140835{,}116308 \text{ rad/s}$$

1) (4 val.) A peça em forma de **L** representada na figura possui uma massa m, centro de massa no ponto **G** e oscila em torno do ponto **O**. A peça está ligada ao exterior através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da peça em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.



Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 2600$ N/m $\quad c = 30$ Ns/m $\quad m = 0.5$ kg $\quad J = 0.1$ kgm^2

$a = 0.15$ m $\quad b = 0.12$ m $\quad r = 0.05$ m

determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento;

c) (10%) a frequência natural amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10^o$ e $\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s, determinar,

d) (15%) a energia introduzida no sistema;

e) (15%) a expressão da resposta $\theta(t)$ do sistema. Apresentar um esboço gráfico.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 30 N e uma frequência de 6 Hz, determinar:

f) (15%) a resposta estacionária do sistema;

g) (15%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima da força transmitida ao apoio **D**.

Quantidade de aceleração no ponto G:

$$\vec{Q}_G = m \times \vec{a}_G = m \times \begin{Bmatrix} -\lambda\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\lambda\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times (\vec{F}_k + \vec{f}(t)) + \vec{OG} \times m\vec{g} + \vec{OB} \times \vec{F}_c = \vec{K}_O \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Ka\theta - f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\lambda\theta \\ \lambda \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad -Ka^2\theta + f(t)\,a + \lambda mg\theta - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + (Ka^2 - \lambda mg)\,\theta(t) = a\,f(t)$$

b) Para os valores do enunciado, temos:

$$0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}432\,\dot{\theta}(t) + 58{,}255\,\theta(t) = 0{,}15\,f(t)$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}432}{2 \times 0{,}1 \times \sqrt{\frac{58{,}255}{0{,}1}}} = 0{,}089493$$

c) Frequência natural amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = \sqrt{\frac{58{,}255}{0{,}1}} \times \sqrt{1 - 0{,}089493^2} = 24{,}039225$$

$\omega_n = 24{,}136093$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{24{,}039225} = 0{,}261372\ \lambda$$

d) Para a perturbação inicial. $\theta_0 = 10^\circ = \frac{10 \times \pi}{180} = 0{,}174533$ rad

$\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s

Energia cinética inicial: $E_c = \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}_0^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 12^2 =$

$= 7{,}2$ J

Energia potencial inicial: $E_p = \frac{1}{2} \times k_{eq} \times \theta_0^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 58{,}255 \times 0{,}174533^2 =$

$= 0{,}887275$ J

Então a energia introduzida no sistema foi de:

$$E_0 = E_{c_0} + E_{p_0} = 7{,}2 + 0{,}887275 = 8{,}087275 \text{ J}$$

e) A resposta $\theta(t)$ do sistema é do tipo:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Para tal é necessário calcular as constantes:

$$A_1 = \theta_0 = 0{,}174533 \text{ rad}$$

$$A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_d} = \frac{12 + 0{,}089493 \times 24{,}136073 \times 0{,}174533}{24{,}039225} = 0{,}514867$$

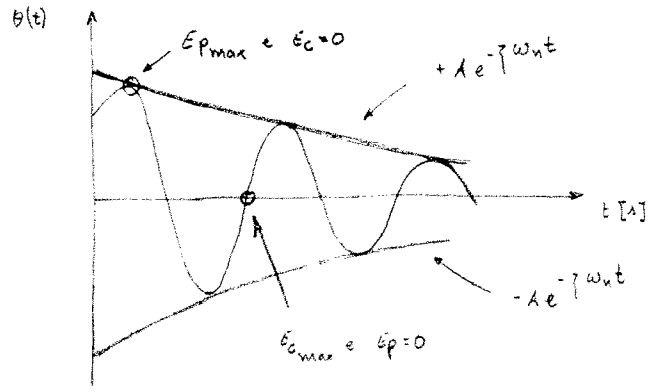
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0{,}174533^2 + 0{,}514867^2} = 0{,}543645$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1} \frac{0{,}514867}{0{,}174533} = 1{,}243967$$

Temos então:

$$\theta(t) = 0{,}543645\, e^{-2{,}16\, t} \cos(24{,}039225\, t - 1{,}243967)$$

Graficamente, temos:



A energia total introduzida no sistema é então:

$$E_{TOTAL} = T + V =$$

$$= 7,2 + 5,08362 =$$

$$= 12,28362 \text{ J}$$

e) A expressão da resposta $\theta(t)$ do sistema é dada por:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Onde:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{12 + 0,08949 \times 24,13607 \times 0,17453}{24,13607 \times \sqrt{1 - 0,08949^2}}\right)^2 + 0,17453^2}$$

$$= 0,54364 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, \theta_0} = \tan^{-1} \frac{12 + 0,08949 \times 24,13607 \times 0,17453}{24,13607 \times \sqrt{1 - 0,08949^2} \times 0,17453} =$$

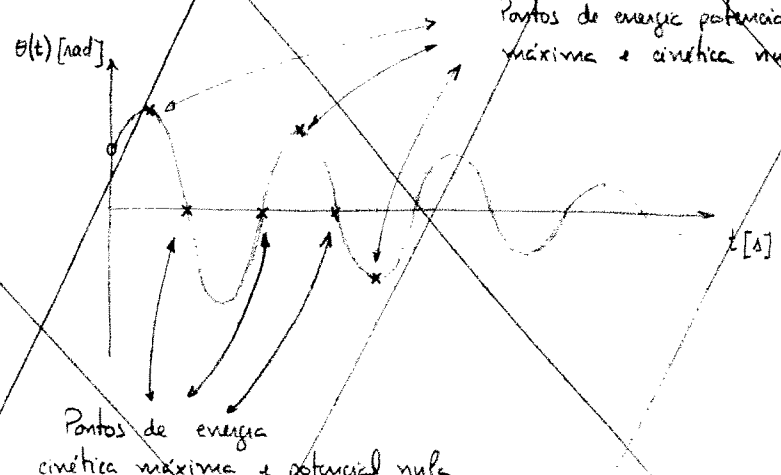
$$= 1,24397 \text{ rad}$$

Temos então:

$$\theta(t) = 0,54364\, e^{-0,08949 \times 24,13607 \times t} \cos(24,03923\, t - 1,24397) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 0,54364\, e^{-2,15994\, t} \cos(24,03923\, t - 1,24397)$$

Graficamente, temos:



f) Considerando a solicitação harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$; $F = 30N$; $f = 6\ Hz$

A frequência de excitação é: $\omega = 2\pi \times f \Leftrightarrow \omega = 12\pi$

A equação do movimento vem então:

$$0{,}1\ \ddot{\theta}(t) + 0{,}432\ \dot{\theta}(t) + 58{,}255\ \theta(t) = 0{,}15 \times 30 \times \cos(12\pi t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1\ \ddot{\theta}(t) + 0{,}432\ \dot{\theta}(t) + 58{,}255\ \theta(t) = 4{,}5 \cos(12\pi t)$$

Resposta permanente $\theta_p(t)$ é dada por:

$$\theta_p(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Onde:

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{F_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = \frac{\frac{4{,}5}{58{,}255}}{\sqrt{(1-1{,}56194^2)^2 + (2 \times 0{,}08949 \times 1{,}56194)^2}} = 0{,}05267\ rad$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{12\pi}{24{,}13607} = 1{,}56194$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \frac{2 \times 0{,}08949 \times 1{,}56194}{(1-1{,}56194^2)} = 0{,}88530\ rad$$

Temos então:

$$\theta_p(t) = 0{,}05267 \cos(12\pi t - 0{,}88530)$$ //

g) Deslocamento estático:

$$\theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \theta_s = \frac{4{,}5}{58{,}255} = 0{,}07725$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{max} = \frac{1}{2 \times 0{,}08949 \times \sqrt{1-0{,}08949^2}} = 5{,}60972$$

O máximo de amplitude de resposta é:

$$\mu_{max} = \frac{\Theta(\omega)}{\theta_s} \Leftrightarrow \Theta(\omega) = \mu_{max} \times \theta_s \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = 5{,}60972 \times 0{,}07725 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0{,}43335\ rad$$

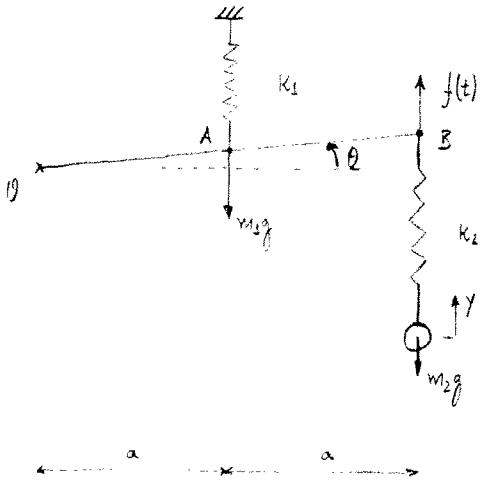
Frequência de ressonância (ocorre para o máximo do factor de amplificação dinâmica):

$$\omega_r = \omega_n \times \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 24{,}13607 \times \sqrt{1-2 \times 0{,}08949^2} = 23{,}94120\ rad/s$$

Exame de Época Especial de 30-11-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Quando perturbamos o sistema temos:



As coordenadas generalizadas são: $q_1 = \theta \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{\theta}$; $q_2 = y \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{y}$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \times J_1 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{12} \times m_1 \times 4a^2 + m_1 \times a^2 \right] \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{4}{3} \times m_1 \times a^2 \right] \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \times K_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times K_1 \times (a \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (y - 2a \operatorname{sen}\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times K_1 \times a^2 \times \theta^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (y - 2a\theta)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t) \times \frac{\partial}{\partial \theta} (2a \operatorname{sen}\theta) + 0 = f(t) \times 2a \cos\theta = f(t) \times 2a$$

$$Q_2 = f(t) \times \frac{\partial}{\partial y} (2a \operatorname{sen}\theta) + 0 = f(t) \times 0 = 0$$

Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} + \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} + \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

Onde:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2} k_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - 2a\theta)^2\right) = k_1 a^2 \theta + k_2 (y - 2a\theta) \times (-2a) =$$

$$= k_1 a^2 \theta - 2k_2 a (y - 2a\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d}{d\dot{y}}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = m_2 \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_2 \ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2} k_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - 2a\theta)^2\right) = k_2 (y - 2a\theta)$$

Que resulta nas seguintes equações diferenciais do movimento:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\theta} + k_1 a^2 \theta - 2k_2 a (y - 2a\theta) = f(t) \cdot 2a \\ m_2 \ddot{y} + k_2 (y - 2a\theta) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 a^2 + 4 k_2 a^2 & -2k_2 a \\ -2k_2 a & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6m \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10K \times 0,5^2 + 4 \times 2K \times 0,5^2 & -2 \times 2K \times 0,5 \\ -2 \times 2K \times 0,5 & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f(t) \times 2 \times 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,5K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4,5K - \omega^2 \times 6m & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4,5K - \omega^2 \times 6m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 \times m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 0,5889 \sqrt{\frac{k}{m}} \wedge \omega_2 = 1,5502 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$$

Formas naturais de vibração:

1ª Forma natural: $-2 \times k \times \Theta(\omega) + (2 \times K - \omega_1^2 \times m) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k\,\Theta(\omega) + \left(2k - 0,3469 \frac{k}{\cancel{m}} \times \cancel{m}\right) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = \frac{-(2k - 0,3469k)}{-2k} Y(\omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0,8266\, Y(\omega) \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix}$

2ª Forma natural: $-2 \times K \times \Theta(\omega) + (2 \times K - \omega_2^2 \times m) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k\,\Theta(\omega) + \left(2k - 2,4032 \frac{k}{\cancel{m}} \times \cancel{m}\right) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = \frac{-(2k - 2,4032k)}{-2k} Y(\omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = -0,2016\, Y(\omega) \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix}$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T \times [m] \times \{u\}_1}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} 0,8266 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix}}} \times \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0,3949 \\ 0,4777 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T \times [m] \times \{u\}_2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} -0,2016 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix}}} \times \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,1953 \\ 0,9690 \end{Bmatrix}$$

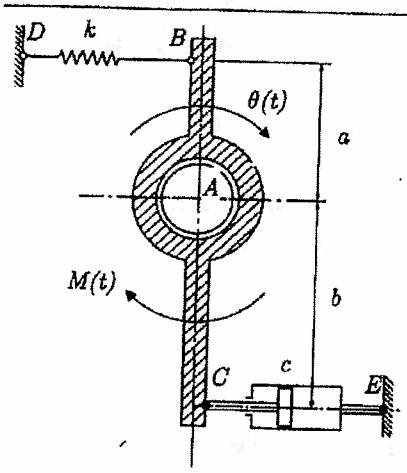
As equações de movimento do sistema na base modal é:

$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 94,224 & 0 \\ 0 & 248,032 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3949 & -0,1953 \\ 0,4777 & 0,9690 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 94,224\ \eta_1(t) \\ 248,032\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3949\ f(t) \\ -0,1953\ f(t) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 94,224\ \eta_1(t) = 0,3949\ f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 248,032\ \eta_2(t) = -0,1953\ f(t) \end{cases} //$$



1) (4 val.) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.

Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 9 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:

- 1ª oscilação: $\theta_1 = 8°$;
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 4°$.

a) (30%) Estabelecer a equação diferencial do movimento.

Sabendo que a rigidez da mola é de 860 Nm^{-1}, $a = 30$ mm e $b = 50$ mm, determinar:

b) (10%) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;

c) (10%) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

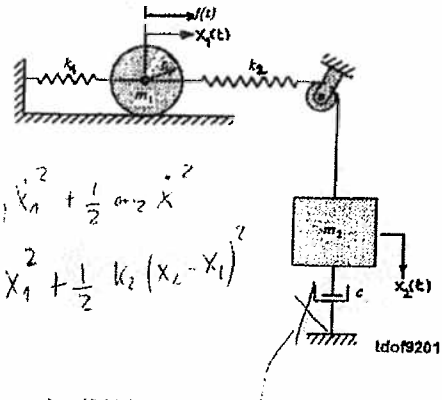
d) (10%) o momento de inércia I_A do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;

e) (10%) o valor da constante c do amortecedor;

Para uma solicitação harmónica provocada pelo momento aplicado em A, $M(t) = M_m \cos(\omega t)$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:

f) (10%) a frequência de ressonância ω_r;

g) (20%) a(s) frequência(s) ω de excitação para a qual a amplitude de resposta vale $\Theta(\omega) = 10°$.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de raio r e massa m_1 que rola sem escorregar sobre uma superfície plana e que está ligado ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por um cabo de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por um amortecedor de tipo viscoso e de constante c.

No eixo do cilindro está aplicada uma solicitação $f(t)$.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) (30%) Escrever, literalmente, as equações de movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para o sistema não amortecido e para os valores seguintes:

$m_1 = \frac{2}{3}m$ $\quad m_2 = 3m$ $\quad r = 0.15$ m $\quad k_1 = 80$ N/m $\quad k_2 = 160$ N/m

b) (15%) Determinar as frequências naturais de vibração;

c) (15%) Determinar e comentar as formas naturais de vibração.

d) (10%) Exprimir as equações de movimento na base modal;

Para $m = 2$ kg.

e) (10%) Determinar o valor máximo das respostas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ devido a uma força harmónica de amplitude F e de frequência $\omega = 8$ rad/s. Comentar o resultado.

3) (4 val.) A figura a) representa uma árvore (de máquina) de comprimento $\ell = 1.20$ m, de secção recta circular de diâmetro d, de área A, momento de 2ª ordem I e momento polar I_p. O material apresenta módulo de Young $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 81$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Na extremidade $x = 0$, a árvore está encastrada para a flexão e livre em torção.

a) (30%) Dimensionar a recção recta da árvore de modo que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 40 Hz.

b) (15%) Determinar a frequência natural de vibração de torção.

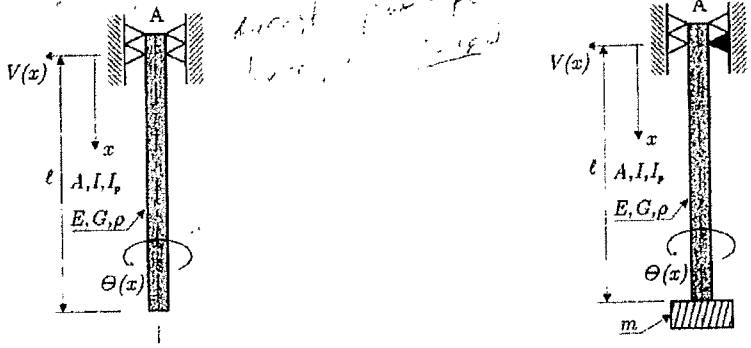
A figura b) representa a árvore com uma ferramenta de massa $m = \alpha\rho A\ell$ na extremidade $x = \ell$. Considerando o método da energia de Rayleigh e a função de aproximação da forma natural fundamental, $V(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$,

c) (10%) discutir, justificando, a aplicabilidade da função de aproximação proposta para estimar a frequência natural de flexão;

d) (25%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão;

e) (10%) determinar o valor da frequência natural de flexão para m igual a 25% da massa da árvore;

f) (10%) Indicar, justificando, uma função de aproximação adequada para estimar a frequência fundamental de torção.

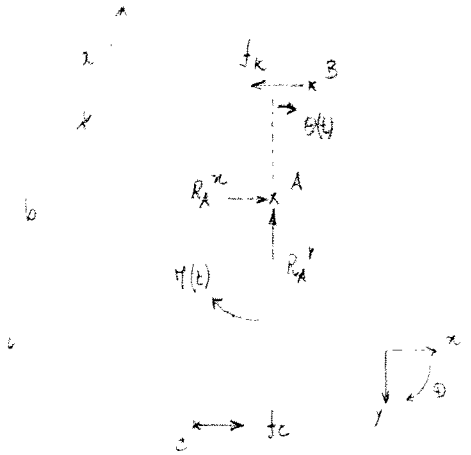


FEUP, 30 de Março de 2011
José Dias Rodrigues

Exame de Conclusão do Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando o sistema é perturbado:



$f_d = 9\,Hz$

1º ressalto: $\theta_1 = 8°$

2º ressalto: $\theta_2 = 4°$

$f_k = a\,k\,\theta$

$f_c = b\,c\,\dot{\theta}$

Frequência de vibração amortecida:

$$\omega_d = 2\pi f \quad \Leftrightarrow \quad \omega_d = 2\pi \times 9 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_d = 18\pi \ rad/s$$

a) Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{K}_A$$

$$\Leftrightarrow -a \times a\,k\,\theta - b \times b\,c\,\dot{\theta} + M(t) = J\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta} + c\,b^2\dot{\theta} + k\,a^2\theta = M(t)$$

b) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta_{t1}}{\theta_{t2}} \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 0{,}346574$$



Ratio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,346574}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,346574^2}} \quad (=) \quad \zeta = 0,055075$$

c) Frequência natural angular não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \omega_d \times \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = 18\pi \times \frac{1}{\sqrt{1-0,055075^2}} \quad (=) \quad \omega_n = 56,634627 \ rad/s$$

d) Momento de inércia no ponto A, J_A:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad (=) \quad \omega_n^2 = \frac{K_{eq}}{m_{eq}} \quad \therefore \quad \omega_n^2 = \frac{K a^2}{J_A} \quad (=)$$

$$(=) \quad 56,634627^2 = \frac{860 \times 0,030^2}{J_A} \quad (=) \quad J_A = 2,413 \times 10^{-4} \ kg\,m^2$$

e) Constante de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c_{eq}}{2 \frac{K_{eq}}{\omega_n^2} \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c_{eq} \times \omega_n}{2 \times K_{eq}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \zeta = \frac{c\, b^2 \times 56,634627}{2 \times K a^2} \quad (=) \quad 0,055075 = \frac{c \times 0,050^2 \times 56,634627}{2 \times 860 \times 0,030^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad c = 0,602148 \ Ns/m$$

f) Frequência de ressonância, ω_r:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 56,634627 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,055075^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \omega_r = 56,462578 \ rad/s$$

g) Amplitude de resposta $B(\omega) = 10°$:

$$B(\omega) = \mu\, B\lambda \quad (=) \quad \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0{,}055075 \times \beta)^2}} \times \frac{0{,}1}{860 \times 0{,}03^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \beta = 1{,}313763$$

As frequências ω de excitação para as quais a amplitude vale $\Theta(\omega) = 10°$ são:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \frac{\omega_2}{\omega_n} = 1{,}313763 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega_1}{56{,}634637} = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \frac{\omega_2}{56{,}634637} = 1{,}313763 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 28{,}983110 \ rad/s \quad \wedge \quad \omega_2 = 74{,}404477 \ rad/s$$

Exame de Conclusão de Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

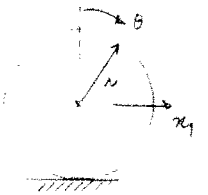
a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times J_1 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_1 r^2 \times \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$



$x_1 = r\theta$
$\dot{x}_1 = r\dot{\theta}$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times K_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (x_1 - x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) =$

$= \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_1^2 - K_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2$

Função de dissipação de Rayleigh: $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \times c \times \dot{x}_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x_1$

$Q_1 = f(t) \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = f(t)$

$Q_2 = 0 + 0 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = K_1 x_1 + K_2 x_1 - K_2 x_2$

$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_2} = c\dot{x}_2$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -K_2 x_1 + K_2 x_2$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2 x_1 - K_2 x_2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + K_2 x_2 + c\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Tendo em conta os valores numéricos:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \times 1/2 \times m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} 240 - \omega^2 \times m & -160 \\ -160 & 160 - \omega^2 \times 3m \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3,917724}{\sqrt{m}} \quad \vee \quad \omega_2 = \frac{16,672875}{\sqrt{m}} \quad [rad/s]$$

c) Formas naturais de vibração:

$$(-160)\, u_1 + (160 - \omega_1^2 \times 3m)\, u_2 = 0 \;\therefore$$

$$\therefore (-160)\, u_1 + \left(160 - \frac{3,917724^2}{m} \times 3 \times m\right) u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 = 1,404071\, u_1 \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,404071 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Fase}$$

$$(-160)\, u_1 + (160 - \omega_2^2 \times 3m)\, u_2 = 0 \;\therefore$$

$$\therefore (-160)\, u_1 + \left(160 - \frac{16,672875^2}{m} \times 3 \times m\right) u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 = -0,237405\, u_1 \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,237405 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Oposição de fase}$$

d)

Exame de Conclusão de Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento: $\ell = 1{,}20$ m
Secção circular
Módulo de Young: $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80$ GPa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3
Para $x = 0$: encastrada à flexão e livre em torção

a) O diâmetro da secção recta, nas condições do problema é:

$$f_1 = 40 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\beta_1 \ell)^2 \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{A\rho\ell^4}} = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}8751^2 \times \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi}{64} d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 1{,}2^4}} = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}079351 \text{ m}$$

O diâmetro da secção recta tem de ser superior a 0,079351 m para que a frequência natural fundamental seja superior a 40 Hz

b) A frequência natural de vibração de torção, para um veio com as condições de fronteira à torção livre-livre é dada por:

$$\omega_1 = \frac{1\pi}{\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{1{,}20} \times \sqrt{\frac{80\times10^9}{7800}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = 8384{,}290527 \text{ rad/s}$$

c) Função de aproximação: $V(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$

A função tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, pois é metade da ordem do problema (4ª ordem):

$$\frac{d}{dx}V(x) = \frac{2\delta x}{\ell^2} \quad ; \quad \frac{d^2}{dx^2}V(x) = \frac{2\delta}{\ell^2}$$

Condições de fronteira geométricas (têm de ser verificadas):

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\frac{0}{\ell}\right)^2 = 0 \quad (=) \quad 0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\delta 0}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Condições de fronteira naturais:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} v(\ell) = m \times \frac{d^2}{dt^2} v(\ell)$$

A função de aproximação é aplicável

d) Método da energia de Rayleigh:

A função de aproximação é válida.

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} v(x)\right]^2 dx + V_{cfm} =$$

$$= \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \left(\frac{2\delta}{\ell^2}\right)^2 dx + 0 = \frac{2 EI \delta^2}{\ell^3}$$

$$T^* = \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{cfm} =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\delta \frac{x^2}{\ell^2}\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \left(\frac{\delta \ell^2}{\ell^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \frac{\delta^2 \ell}{5} + \frac{1}{2} \times \alpha \rho A \ell \delta^2 =$$

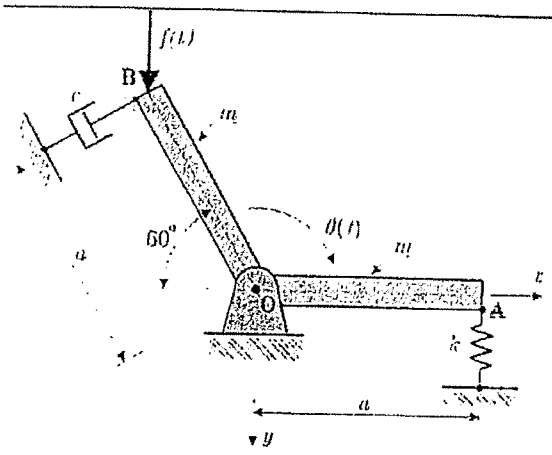
$$= \frac{1}{10} \rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} \alpha \rho A \ell \delta^2$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2 EI \delta^2}{\ell^3}}{\frac{1}{10} \rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} \alpha \rho A \ell \delta^2} = \frac{20 EI}{\lambda \ell^4 \rho (5\alpha + 1)}$$

e) Massa da árvore: $M_{arv} = \frac{\pi \times d^2}{4} \times \ell \times \rho = \frac{\pi}{4} \times 0{,}079351^2 \times 1{,}2 \times 7800 = 46{,}288226$ kg

Massa da ferramenta: $m = 0{,}25 \times M_{arv} = 0{,}25 \times 46{,}288226 = 11{,}572057$ kg

Então: $$\omega = \left[\frac{2 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times 0{,}079351^4}{\frac{1}{10} \times 7800 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}079351^2 \times 1{,}2 + \frac{1}{2} \times 11{,}572057}\right]^{\frac{1}{2}} = 280{,}148222 \text{ rad/s}$$



1) (7 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida AOB formada pelos tramos AO e OB. Cada um dos tramos apresenta uma massa m e um comprimento a. A barra AOB está ligada ao exterior através de uma articulação no ponto O. No ponto A está ligada a uma mola linear elástica de constante de rigidez k e no ponto B a um amortecedor viscoso de constante c. Na posição de equilíbrio estático, o tramo OA encontra-se na horizontal e, a partir dessa posição de referência, o mecanismo efectua pequenas oscilações $\theta(t)$.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial de movimento;

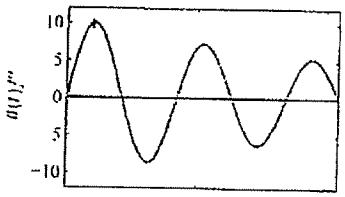
Para a aplicação numérica seguinte,

$k = 30\times10^3\,\mathrm{N/m}$, $c = 20\,\mathrm{Ns/m}$, $a = 0.5\,\mathrm{m}$, $m = 2.0\,\mathrm{kg}$,

determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento e a frequência natural de vibração amortecida.

Na posição de equilíbrio estático, a barra recebe um impulso que lhe provoca o movimento de resposta $\theta(t)$ representado na figura ao lado, atingindo um valor máximo de $10°$.



Determinar:

c) (10%) o tempo necessário para atingir a resposta máxima igual a $10°$;

d) (10%) as condições iniciais provocadas pelo impulso;

e) (10%) a energia dissipada até ao instante em que a resposta atinge o valor máximo de $10°$.

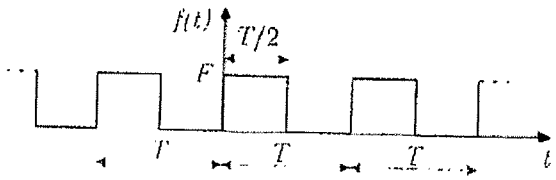
Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$, com $F = 20\,\mathrm{N}$ e $\omega = 20\,\mathrm{Hz}$, determinar:

f) (10%) a frequência de ressonância do sistema;

g) (15%) a componente y da reacção estacionária em O, $R_O^y(t)$;

Para a solicitação periódica representada na figura abaixo, com $T = 0.12\,\mathrm{s}$, determinar, justificando,

h) (15%) uma estimativa representativa da resposta do sistema considerando apenas 2 termos da série de Fourier.



2) (5 val.) A barra de comprimento $\ell = 2$ m representada na figura pode rodar em torno do ponto O e está ligada a um conjunto mola/amortecedor no ponto A. A massa da barra é $m = 30$ kg, a rigidez da mola é $k = 5 \times 10^4$ N/m e a constante de amortecimento é $c = 100$ Ns/m. Um deslocamento harmónico $s(t) = S\cos\omega t$, com $\omega = 150$ rad/s, é imposto ao ponto B do conjunto mola/amortedor.

Determinar:

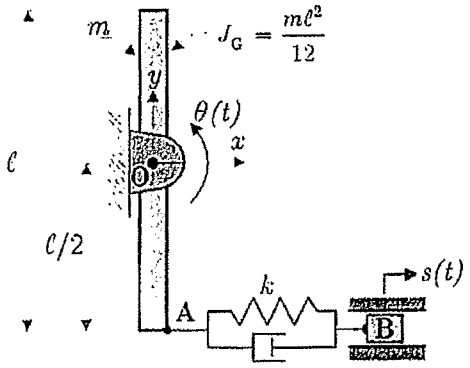
a) (30%) a equação de movimento do sistema:

b) (20%) a amplitude S da excitação harmónica $s(t)$ que provoca uma rotação com amplitude $\frac{\pi}{50}$ rad;

c) (25%) a força transmitida no ponto A.

Para $c = 0$, sistema não amortecido, determinar:

d) (25%) o(s) valor(es) da constante de rigidez k para que a amplitude de oscilação no ponto A seja inferior à do sistema amortecido anterior.

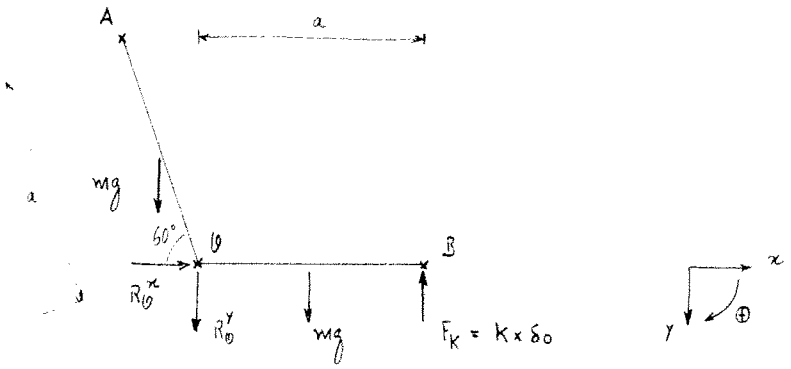


FEUP, 29.04.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2011 — Estudo para fins de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Quando o sistema encontra-se na sua posição de equilíbrio estático temos:

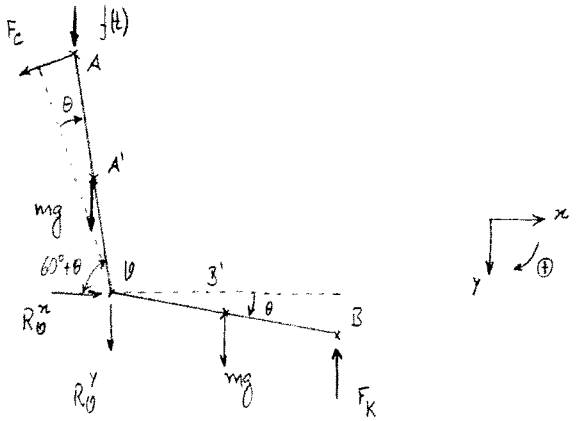


$$\Sigma \vec{F}^x = \vec{0} \Leftrightarrow R_{0x} = 0$$

$$\Sigma \vec{F}^y = \vec{0} \Leftrightarrow mg + mg + R_{0y} + F_K = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \times \cos 60° \times mg + \frac{a}{2} \times mg - a \times K \times \delta_0 = 0$$

Quando perturbamos o sistema temos:



$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \vec{F_c} + \vec{OA} \times \vec{f(t)} + \vec{OA} \times \vec{mg} + \vec{OB} \times \vec{mg} + \vec{OB} \times \vec{F_K} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a \times ac\dot{\theta} - a \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \times f(t) - \frac{a}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \times mg + \frac{a}{2} \cos\theta \times mg -$$

$$- a \times \cos\theta \times (K_0\theta + K\delta_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\ddot{\theta} - a \times \cos\frac{\pi}{3} \times f(t) - \frac{a}{2} \times \cos\frac{\pi}{3} \times mg + \frac{a}{2} mg - a^2 K\theta - a K\delta_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\ddot{\theta} - a^2 K\theta - a\cos\frac{\pi}{3} f(t) = 0$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + \cancel{\vec{\omega}_G \times \vec{Q}_G}^{\,=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O$$

$$\therefore -ca^2\dot{\theta} - Ka^2\theta - a\cos\tfrac{\pi}{3} f(t) = J_O \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; J_O \ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + Ka^2\theta(t) = -\tfrac{a}{2} f(t)$$

O momento de inércia J_O é dado por:

$$J_O = J_{G_1} + m_1 \times \overline{OG_1}^2 + J_{G_2} + m_2 \times \overline{OG_2}^2 =$$

$$= \frac{1}{12} \times m \times a^2 + m \times \frac{a^2}{2^2} + \frac{1}{12} \times m \times a^2 + m \times \frac{a^2}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 + \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 =$$

$$= \frac{8}{12} ma^2 = \frac{2}{3} ma^2$$

b) Frequência natural de vibração não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{30000 \times 0{,}5^2}{\frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2}} = 150 \text{ rad/s}$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{20 \times 0{,}5^2}{2 \times \frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2 \times 150} = 0{,}05$$

Frequência natural de vibração amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 150 \times \sqrt{1 - 0{,}05^2} = 149{,}812383 \text{ rad/s}$$

c) O impulso recebido pela barra é equivalente a uma velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ diferente de zero e θ_0 igual a zero. Então:

$$\theta_0 = 0$$

$$\dot{\theta}_0 \neq 0$$

O instante em que a resposta é máxima, pela primeira vez, isto é, $\theta = 10°$, é dada por:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n-1)\pi + \phi\right] \quad \wedge \quad n = 1$$

Onde o valor de ϕ é:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_d\,\theta_0}\right) \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_0 + 0}{0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

Então, o instante em que é atingida a resposta máxima de 10° é:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{149,812383}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{0,05}{\sqrt{1-0,05^2}}\right) + (1-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad \wedge \quad n = 1 \quad (=)$$

$$(=) \quad t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = 0,010151 \text{ s}$$

d) A constante A é obtida através da equação da resposta livre do sistema sub-amortecido:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_d t - \phi\right)$$

E para o instante $t = 0,010151$ s, ficando então:

$$\frac{10\times\pi}{180} = A \times e^{-0,05\times 150\times 0,010151} \times \cos\left(149,812383\times 0,010151 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (=)$$

$$(=) \quad A = 0,188576$$

O valor de $\dot{\theta}_0$ é obtido pela expressão da constante A:

$$A = \left[\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\overbrace{\theta_0}^{=0}}{\omega_d}\right)^2 + \overbrace{\theta_0^2}^{=0}\right]^{1/2} \quad \therefore \quad 0,188576 = \frac{\dot{\theta}_0}{149,812383} \quad (=) \quad \dot{\theta}_0 = 28,251020 \text{ rad/s}$$

Já o valor de θ_0 sabemos desde as alíneas anteriores que $\theta_0 = 0$.

e) No instante $t=0\,s$ temos:

$$E(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta_0^2 \quad (\theta_0 = 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times m \times a^2 \times 28{,}251020^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2 \times 28{,}251020^2 =$$

$$= 133{,}020022 \ J$$

No instante $t = 0{,}010151\,s$ temos:

$$E(t=0{,}010151) = E_c(t=0{,}010151) + E_p(t=0{,}010151) =$$

$$= \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta^2 \quad (m_{eq} = 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times K \times a^2 \times \left(\frac{10 \times \pi}{180}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 10^3 \times 0{,}5^2 \times \left(\frac{10\pi}{180}\right)^2 =$$

$$= 114{,}231532 \ J$$

A energia dissipada até ao instante $t = 0{,}010151\,s$ é:

$$E_{dissipada} = 133{,}020022 - 114{,}231532 = 18{,}78849 \ J$$

f) Frequência de ressonância do sistema:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 150 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}05^2} \quad (=) \quad \omega_d = 149{,}62453 \ rad/s$$

g) Razão de frequências, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_N} \quad \therefore \quad \beta = \frac{2\pi \times 20}{150} = 0,837758$$

Amplitude da resposta, $\mathcal{B}(\omega)$:

$$\mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{-\frac{a}{2} F}{K a^2} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-0,837758^2)^2 + (2 \times 0,05 \times 0,837758)^2}} \times \frac{-0,5 \times 20}{2 \times 30 \times 10^3 \times 0,5^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mathcal{B}(\omega) = -0,002153 \text{ rad}$$

Deslocamento, ϕ:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,05 \times 0,837758}{1 - 0,837758^2} = 0,272912 \text{ rad}$$

Fazendo o equilíbrio na vertical, temos:

$$\Sigma \vec{F_y} = \vec{0} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) + f_k(t) - f_c(t) \times \cos 60° - f(t) = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) + Ka\,\theta(t) - ca\,\dot{\theta}(t) \cos \pi/3 - F \cos \omega t = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) = F \cos \omega t + ca \cos \pi/3 \times (-\mathcal{B}(\omega)\,\omega\, \mathrm{sen}(\omega t - \phi)) - Ka\,\mathcal{B}(\omega) \cos(\omega t - \phi) \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) =$$

g) Equilíbrio de forças na vertical:

$$\Sigma \vec{F_y} = \cancel{\vec{0}} \quad \therefore$$

$$\therefore \vec{r_O^y}(t) + \vec{f_K}(t) + \vec{f_c'}(t) + \vec{f}(t) = \cancel{\vec{0}} \; m_1 \vec{a}_{G_{1O}} + m_2 \vec{a}_{G_{2O}}$$

$$\therefore r_O^y(t) + f_K(t) - f_c(t) \times \cos 60^\circ - f(t) = 0 \, m_1 a^y_{G_{1O}} + m_2 a^y_{G_{2O}} \qquad \text{(equação 1)}$$

Onde as componentes da equação anterior são:

$$\theta(t) = \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$r_O^y(t) = R_O^y \cos(\omega t - \phi)$$

$$f_K(t) = K a \, \theta(t) = K a \, \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi) = K a \, \mu \, \Theta_s \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= K a \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \cancel{K} \cancel{a} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-\frac{\cancel{a}}{2} F}{\cancel{K} \cancel{a^2}} \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-F}{2} \cos(\omega t - \phi)$$

$$f_c(t) = c a \, \dot{\theta}(t) = -c a \, \omega \, \Theta(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \phi) =$$

$$= -c \cancel{a} \omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-\frac{\cancel{a}}{2} F}{K \cancel{a^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) =$$

$$= c\omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{F}{2K} \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$f(t) = F \cos \omega t$$

Razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{20 \times 2\pi}{150} = 0{,}837758$$

Desfasamento, ϕ:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}05 \times 0{,}837758}{1 - 0{,}837758^2} = 0{,}273912 \text{ rad}$$

Voltando à equação 1, temos:

$$x_0^{\gamma}(t) = F\cos\omega t + c\omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \frac{F}{2k} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \times \cos 60° -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \frac{-F}{2} \cos(\omega t - \phi)$$

b) Solicitação:

$$f(t) = \begin{cases} F, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases}$$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Coeficientes de Fourier: $F_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt =$

$$= \frac{2}{T}\left[Ft\Big|_0^{T/2} + 0\Big|_{T/2}^{T} \right] = \frac{2}{T}\left[F \times \frac{T}{2} - 0 \right] = F$$

$$A_1 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} F\cos(\omega t)\,dt + \frac{2}{T}\underbrace{\int_{T/2}^{T} 0 \times \cos(\omega t)\,dt}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{T} F\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T} F\left(\operatorname{sen}(\omega T/2) \times \left(\frac{1}{\omega}\right)\right) = \frac{2F}{T\omega}\operatorname{sen}\left(\omega\frac{T}{2}\right) \times \frac{1}{\omega} =$$

$$= \frac{2 \times 20}{0{,}12 \times 20 \times 2\pi}\operatorname{sen}\left(20 \times 2\pi \times \frac{0{,}12}{2}\right) \times \frac{1}{20 \times 2\pi} = 2{,}52\,27\,56$$

$$B_1 = \frac{2}{0{,}06}\int_0^{0{,}06} f(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = 1{,}8329$$

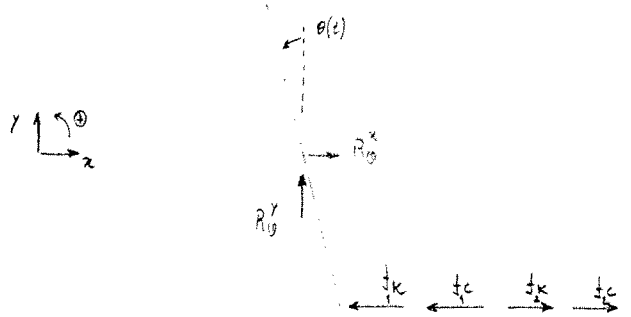
$$A_2 = \frac{2}{0{,}12}\left[\int_0^{0{,}06} f(t)\cos(2\omega t)\,dt + 0\right] = 0{,}7796$$

$$B_2 = \frac{2}{0{,}12}\left[\int_0^{0{,}06} f(t)\operatorname{sen}(2\omega t)\,dt + 0\right] = 2{,}3993$$

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Quando o sistema é perturbado:



$f_{1K} = K \frac{\ell}{2} \theta$

$f_{2K} = K s$

$f_{1C} = C \frac{\ell}{2} \dot{\theta}$

$f_{2C} = C \dot{s}$

Equação do movimento do sistema:

$$\Sigma \vec{M}_0 = \vec{K}_0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K \frac{\ell}{2} \theta \times \frac{\ell}{2} - C \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \times \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \times K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s} = \frac{1}{12} \times m \times \ell^2 \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; -K \frac{\ell^2}{4} \theta - C \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta} + \frac{\ell}{2} K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s} = \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} + C \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta} + K \frac{\ell^2}{4} \theta = \frac{\ell}{2} K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s}$$

Substituindo valores, temos:

$$\frac{1}{12} \times 30 \times 2^2 \ddot{\theta} + 100 \times \frac{2^2}{4} \dot{\theta} + 50000 \times \frac{2^2}{4} \theta = \frac{2}{2} \times 50000 \times s + \frac{2}{2} \times 100 \times \dot{s} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 50000 s(t) + 100 \dot{s}(t)$$

b) Como o deslocamento imposto é harmónico, então, a equação do movimento vem:

$$s(t) = S \cos \omega t = S \cos 150 t$$

$$\dot{s}(t) = -S \omega \operatorname{sen} \omega t = -150 S \operatorname{sen} 150 t$$

$$10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 50000 S \cos \omega t - 100 \omega S \operatorname{sen} \omega t \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = S \sqrt{50000^2 + (150 \times 100)^2} \cos(150 t + \gamma) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = S \times 52201{,}532545 \cos(150 t + \gamma) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 52201{,}532545 \, S \cos(150 t + 0{,}291457)$$

Onde o valor de γ é:

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k} = \tan^{-1}\frac{150 \times 100}{50000} = 0{,}291457 \text{ rad}$$

Frequência natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{50000}{10}} = 70{,}710678 \text{ rad/s}$$

Razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{150}{70{,}710678} = 2{,}121320$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} = \frac{100}{2 \times 10 \times 70{,}710678} = 0{,}070711$$

A amplitude S da excitação harmónica $s(t)$ que provoca uma rotação com amplitude $\pi/50$ rad é:

$$\Theta(\omega) = S\,\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi}{50} = S\,\frac{\sqrt{1+(2\times 0{,}070711\times 2{,}121320)^2}}{\sqrt{(1-2{,}121320^2)^2+(2\times 0{,}070711\times 2{,}121320)^2}} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad S = 0{,}211409 \text{ m}$$

c) Pela equação do movimento, como todas as forças do sistema estão aplicadas sobre o ponto A, podemos então:

$$\tfrac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) + c\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}(t) + k\frac{\ell^2}{4}\theta(t) = \tfrac{\ell}{2} k s + \tfrac{\ell}{2} c \dot{s} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) = \tfrac{\ell}{2}\underbrace{\left[k s + c\dot{s} - k\tfrac{\ell}{2}\theta - c\tfrac{\ell}{2}\dot{\theta} \right]}_{\text{Forças aplicadas no ponto A}} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{12} \times m \times \ell^2 \times \frac{2}{\ell} \times \ddot{\theta}(t) = K s + C\dot{s} - k\tfrac{\ell}{2}\theta - c\tfrac{\ell}{2}\dot{\theta}$$

Resolvendo o primeiro membro da equação anterior, temos a força transmitida ao ponto A:

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega\, \Theta(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\, \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\overrightarrow{F_T^A} = \begin{Bmatrix} 1/12 \times m \times \ell \times 2 \;\; \ddot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_T^A} = 1/12 \times 30 \times 2 \times 2 \times \left[-150^2 \times \Theta(\omega) \times \cos(150t - \psi) \right] =$$

$$= -10 \times 150^2 \times \Theta(\omega) \times \cos(150t - \phi + \gamma) =$$

$$= -2{,}25 \times 10^5 \times \frac{\pi}{50} \times \cos\left(150t - \tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} + \tan^{-1}\frac{\omega c}{k}\right) =$$

$$= -4{,}5 \times 10^3\, \pi \times \cos\left(150t - \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 0{,}070711 \times 2{,}121320}{1 - 2{,}121320}\right) + 0{,}291457\right) =$$

$$= -4{,}5 \times 10^3\, \pi \times \cos(150t + 0{,}5528877)$$

d) Para $c = 0$ temos que $\gamma = 0$.

Queremos que:

$$X_A(\omega) < \Theta(\omega) \times \ell/2 = \pi/50 \times \ell/2 = \frac{\ell\pi}{100}$$

Transmissibilidade absoluta:

$$TR_{abs} = \frac{X(\omega)}{Y} \quad \therefore \quad X(\omega) < TR_{abs} \cdot Y \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{\ell\pi}{100} \times \frac{1}{5} < TR_{abs} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\ell \times \pi}{100 \times 5} < \frac{1}{|1-\beta^2|} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{2 \times \pi}{100 \times 0{,}211409} < \frac{1}{|1-\beta^2|} \quad (\Leftrightarrow)$$

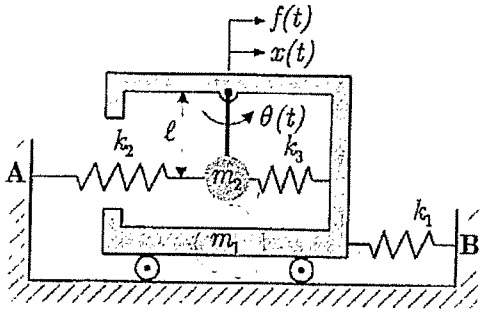
$$(\Leftrightarrow) \quad \beta = 2{,}089181$$

Pela razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad 2{,}089181 = \frac{150}{\sqrt{\frac{k_{eq}}{1/3\, m \ell^2}}} \quad (\Leftrightarrow) \quad k_{eq} = 51550{,}203388 \ N/m$$

A constante k vale então :

$$K_{eq} = k\frac{l^2}{4} \quad \therefore \quad 51550,203388 = k \times \frac{l^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = 51550,203388 \ N/m$$



1) (6 val.) O sistema representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, uma carruagem de massa m_1 ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola de rigidez k_3;
- corpo 2, uma massa m_2 ligada ao exterior pela mola de rigidez k_2 e à carruagem pela mola de rigidez k_3, concentrada na extremidade de uma haste rígida de massa desprezável e de comprimento ℓ articulada à carruagem.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares $\theta(t)$ podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.0\times10^4 & 5.0\times10^3 \\ 5.0\times10^3 & 7.5\times10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Determinar o deslocamento angular $\theta(t)$ devido a uma excitação harmónica $f(t) = 500\cos(40t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias.

e) (15%) Para condições iniciais nulas, determinar o deslocamento angular $\theta(t)$ quando o sistema é sujeito a uma excitação $f(t)$ transiente do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} 500\ \text{N} & 0 < t \le 0.07\,\text{s} \\ 0 & t > 0.07\,\text{s} \end{cases}$$

f) (15%) Determinar o limite superior da força transmitida ao apoio B para a excitação da alínea anterior.

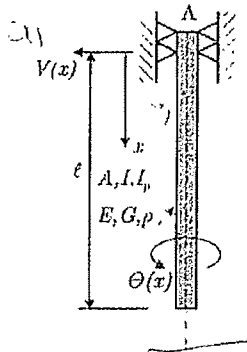
v.s.f.f.

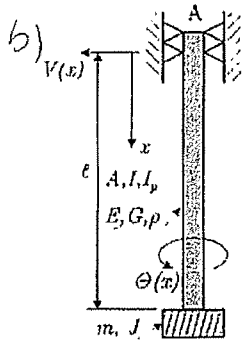
2) (6 val.) A figura a) representa uma árvore (de máquina) de comprimento $\ell = 0.5$ m, de secção recta circular de diâmetro d, de área A, momento de 2ª ordem I e momento polar I_p. O material apresenta módulo de Young $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Na extremidade $x = 0$, a árvore está encastrada para a flexão e livre em torção.

a) (20%) Dimensionar a secção recta da árvore de modo que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 100 Hz.
b) (10%) Determinar a frequência natural de vibração de torção.

A figura b) representa a árvore com uma ferramenta de massa m e momento de inércia $J = J_{zz}$ na extremidade $x = \ell$. Considerando o método da energia de Rayleigh e a função de aproximação da forma natural fundamental, $V(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{2\ell}x\right)$,

c) (10%) discutir, justificando, a aplicabilidade da função de aproximação proposta para estimar a frequência natural de flexão do sistema árvore-ferramenta;
d) (25%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão (método de Rayleigh);
e) (25%) Considerando a solução geral para $\theta(x,t)$, estabelecer a equação de frequências naturais de torção do sistema árvore-ferramenta. Exprimir o resultado em termos de $\lambda = \frac{J}{\rho I_p \ell}$ e indicar o intervalo para a frequência fundamental de torção;
f) (10%) Indicar, justificando, uma função de aproximação adequada para estimar a frequência fundamental de torção do sistema árvore-ferramenta pelo método de Rayleigh.





NOTA 1: Secção circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$

NOTA 2

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} \qquad \int x\sin ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos ax \qquad \int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int x\sin^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

Feup, 13.06.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 2ª Prova de Avaliação de 13-06-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas $q_1(t) = x(t)$ $\dot{q}_1(t) = \dot{x}(t)$
$q_2(t) = \theta(t)$ $\dot{q}_2(t) = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{x}_1 + l\dot{\theta})^2 =$

$= \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} l\dot{\theta} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 (l\theta)^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x^2 + 2xl\theta + l^2\theta^2) + \frac{1}{2} k_3 l^2\theta^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + k_2 xl\theta + \frac{1}{2} k_2 l^2\theta^2 + \frac{1}{2} k_3 l^2\theta^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x$

$Q_1 = f(t) \frac{dx}{dx} + 0 = f(t)$

$Q_2 = f(t) \frac{dx}{d\theta} + 0 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 x + k_2 x + k_2 l\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_2 xl + k_2 l^2\theta + k_3 l^2\theta$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta} + k_1 x + k_2 x + k_2 l\theta = f(t) \\ m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\theta} + k_2 xl + k_2 l^2\theta + k_3 l^2\theta = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 + k_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 50000 & 5000 \\ 5000 & 7500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_{11} & K_{12} - \omega^2 m_{12} \\ K_{21} - \omega^2 m_{12} & K_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad :$$

$$\therefore \left| \begin{bmatrix} 50000 - \omega^2 \times 30 & 5000 - \omega^2 \times 5 \\ 5000 - \omega^2 \times 5 & 7500 - \omega^2 \times 5 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 37{,}416574 \text{ rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 = 44{,}72136 \text{ rad/s}$$

Formas naturais de vibração:

$$(5000 - \omega_1^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - \omega_1^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore (5000 - 37{,}416574^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - 37{,}416574^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad u_2 = 4{,}000000\ u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$(5000 - \omega_2^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - \omega_2^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore (5000 - 44{,}72136^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - 44{,}72136^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad u_2 = -2{,}0\ u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

c) A excitação é harmónica, do tipo: $f(t) = 500 \cos 40t$

Então: $F = 500N$
$\omega = 40 \text{ rad/s}$

O deslocamento angular $\theta(t)$ é dado por:

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \cos(40t - \phi)$$

c) Valores de z_{ij} são:

$$z_{11} = -\omega^2 m_{11} + k_{11} \quad \therefore \quad z_{11} = -40^2 \times 30 + 50000 = 2000$$

$$z_{12} = -\omega^2 m_{12} + k_{12} \quad \therefore \quad z_{12} = -40^2 \times 5 + 5000 = -3000$$

$$z_{22} = -\omega^2 m_{22} + k_{22} \quad \therefore \quad z_{22} = -40^2 \times 5 + 7500 = -500$$

Amplitude de deslocamento, $\frac{\theta_1}{2}(\omega)$:

$$\frac{\theta_1}{2}(\omega) = \frac{0 - (-3000 \times 500)}{2000 \times (-500) - (-3000 \times (-3000))} = -0,15 \text{ rad}$$

Ângulo de fase, ϕ:

Resposta para a coordenada θ:

$$\theta(t) = -0,15 \times \cos(40t - \pi)$$

d) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}30 & 5\\5 & 5\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,081650\\0,326599\end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}30 & 5\\5 & 5\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,182574\\-0,365148\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal.

$$[I]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + [\Omega^2]\left\{\eta(t)\right\} = [\Phi]^T\left\{f(t)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,416574^2 & 0 \\ 0 & 44,721360^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,081650 & 0,182574 \\ 0,326599 & -0,365148 \end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,416574^2 & 0 \\ 0 & 44,721360^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,081650\, f(t) \\ 0,182574\, f(t) \end{Bmatrix}$$

e)

Exame de 2ª Prova de Avaliação de 13-06-2011 — Estudo para fins de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

Comprimento: $\ell = 0{,}5$ m
Secção recta circular de diâmetro d
Momento de 2ª ordem: I
Área da secção: A
Momento polar: I_p
Módulo de Young: $E = 210 \times 10^9$ Pa
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80 \times 10^9$ Pa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3

Para $n = 0$: - encastrada à flexão
- livre à torção

a) Diâmetro da secção recta para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 100 Hz:

$$f_1 = 100 \quad (*)$$

$$(*) \quad \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 100 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{1{,}8751^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 0{,}5^4}} = 100 \quad (\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = 0{,}034440 \text{ m}$$

Onde: $\beta_1 \ell = 1{,}8751$ porque as condições de fronteira são fixo-livre.

b) Para a torção, com as condições de fronteira livre-livre, temos:

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \omega_1 = 1 \times \frac{\pi}{0{,}5} \times \sqrt{\frac{80 \times 10^9}{7800}} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow \quad \omega_1 = 20122{,}992765 \text{ rad/s}$$

c) Função de aproximação da forma natural fundamental :

$$v(x) = \delta \left[1 - \cos \frac{\pi}{2\ell} x \right]$$

Aplicabilidade da função de aproximação para um problema à flexão :

· Como o problema é de flexão (4ª ordem) a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes (metade da ordem do problema)

$$\frac{d}{dx} v(x) = \frac{\delta \pi}{2\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2\ell}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = \frac{\delta \pi^2}{4\ell^2} \cos \frac{\pi x}{2\ell}$$

· Condições de fronteira geométricas, na extremidade $x = 0$, que têm de ser verificadas :

$$v(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\therefore \delta \left[1 - \cos \frac{\pi \times 0}{2\ell} \right] = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

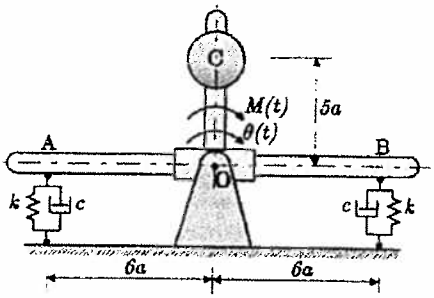
$$(\Leftrightarrow) \quad \delta (1 - 1) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 = 0 \qquad \text{Verificado}$$

$$\frac{d}{dx} v(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\therefore \frac{\delta \pi}{2\ell} \times \operatorname{sen} \frac{\pi \times 0}{2\ell} = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\delta \pi}{2\ell} \times 0 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 = 0 \qquad \text{Verificado}$$

· Condições de fronteira naturais :



1) (4 val.) O pêndulo representado na figura oscila em torno do ponto O, sendo o seu movimento angular $\theta(t)$ controlado por dois conjuntos mola-amortecedor com constante de rigidez k e de amortecimento c. O sistema está sujeito a um momento exterior $M(t)$.

Na análise do sistema, considerar uma massa m concentrada em C e desprezar a massa das barras $\overline{AB}$ e $\overline{OC}$.

Num ensaio em regime livre, foram lidos os seguintes valores sequenciais para o deslocamento angular máximo em torno da posição de equilíbrio estático: 9.9°, −6.9°, 4.9° e −3.4°.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para $a = 0.04$ m, $k = 200$ N · m^{-1} e $m = 3$kg, determinar:

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

c) (15%) a razão de amortecimento ξ e o valor da constante c de cada amortecedor.

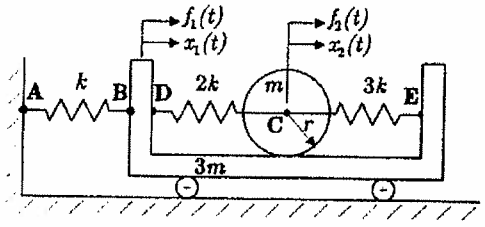
Admitindo uma perturbação inicial $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s,

d) (20%) determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático;

e) (10%) determinar a energia dissipada pelo sistema até regressar definitivamente à posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $M(t) = M_0 \cos \omega t$,

f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure(m) um factor de amplificação dinâmica inferior a $\sqrt{2}$.



2) (4 val.) O sistema mecânico representado na figura é constituído por:

- Uma carruagem de massa $3m$ ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k;
- Um cilindro de massa m e raio r que rola sem escorregar sobre a carruagem à qual está ligado através de 2 molas lineares elásticas de rigidez $2k$ e $3k$.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $x_1(t) = x_2(t) = 0$ e as molas não estão deformadas.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$m\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Para $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) = F\cos\omega t \\ f_2(t) = 0 \end{Bmatrix}$, de modo a que o cilindro funcione como um absorsor de vibrações da carruagem,

b) (25%) determinar a relação ω/ω_n e a força exercida pelo cilindro no ponto **D** da carruagem.

Para $m = 1$ kg e $k = 1$ N/m.

c) (15%) determinar as frequências e formas naturais de vibração.

Para condições iniciais nulas e para uma excitação transiente do tipo $\{f(t)\} = \{F_1 \quad F_2\}^T \mu(t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal;

e) (20%) Determinar a relação F_2/F_1 de modo que a contribuição da 2ª forma natural de vibração seja nula para a resposta $x_1(t)$.

3) (4 val.) A figura representa um tramo de uma tubagem. O tramo tem comprimento ℓ e está simplesmente apoiado nas extremidades, possuindo em $x = \ell$ uma mola angular elástica de rigidez k. A secção recta da tubagem apresenta área A e momento de 2ª ordem I. O material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

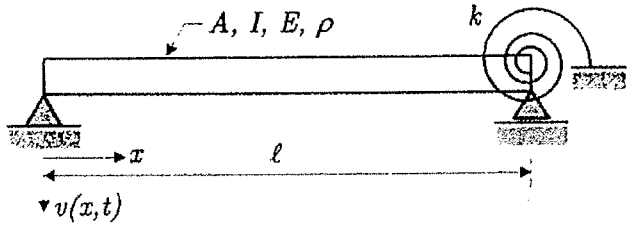
a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira do problema de flexão do tramo da tubagem.

Utilizando o método da energia de Rayleigh com a função $V(x) = \delta \sin \frac{\pi}{\ell} x$ como aproximação da forma natural fundamental de flexão,

b) (40%) Estabelecer e caracterizar uma estimativa ω_1^R da frequência natural fundamental. Apresentar o resultado para $k = \alpha \frac{EI}{\ell}$ onde α representa um escalar.

c) (20%) Indicar o valor da frequência natural fundamental exacta para os valores limite de α, $\alpha \to 0$ e $\alpha \to \infty$;

d) (20%) Determinar o intervalo de valores de α para os quais é adequada a solução fornecida pelo método de Rayleigh com a função $V(x)$ proposta.



NOTA

$$\int \sin ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \qquad \int x \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a} \right) \cos ax \qquad \int x^2 \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax$$

$$\int x \sin^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

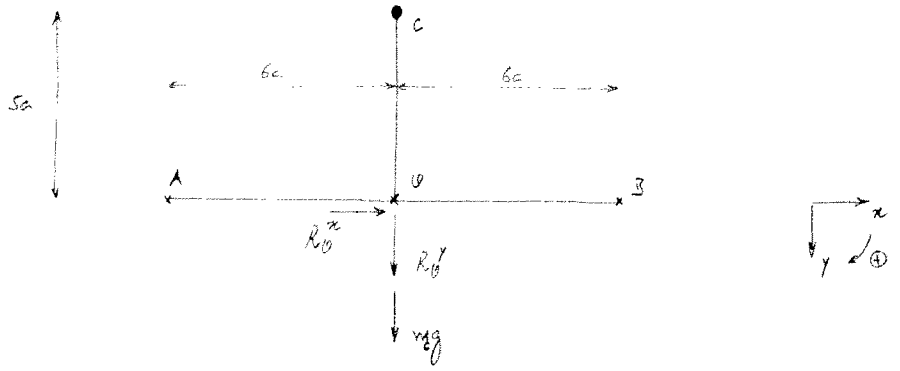
Feup, 08.07.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de Recurso de 08-07-2011
Vibrações e Ruído

Estudo para fins de ensino

Exercício 1

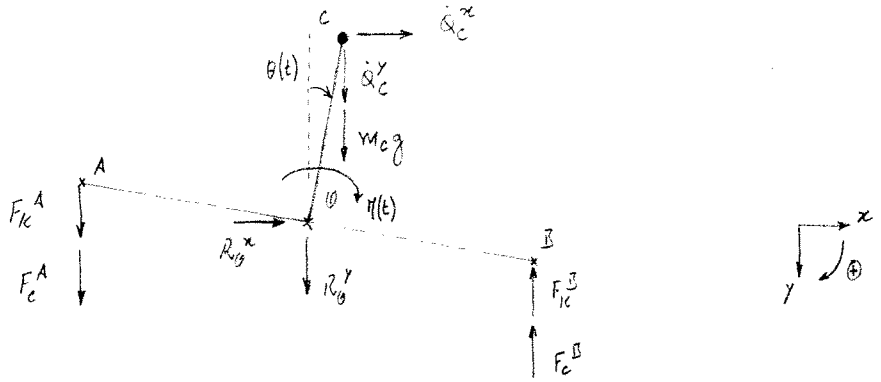
a) Quando o sistema se encontra em equilíbrio estático temos:



$$\Sigma F^x = 0 \quad \therefore \quad R_{IO}^x = 0$$

$$\Sigma F^y = 0 \quad \therefore \quad R_{IO}^y + m_c g = 0 \quad (=) \quad R_{IO}^y = -m_c g$$

Após perturbarmos o sistema temos:



Distâncias:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} 6a\cos\theta \\ 6a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OB} = \begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{Bmatrix} 5a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OC} = \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidades:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_B = \vec{\omega B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_c = \vec{\omega C} = \begin{Bmatrix} 5a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Forças resistentes:

$$\vec{F}_K^A = -K \times \Delta\vec{\omega A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -6a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ +6Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^A = -c \times \vec{v}_A = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -K \times \Delta\vec{\omega B} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 6a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -K6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^B = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Quantidade de aceleração no ponto C:

$$\vec{Q}_C = m \times \vec{a}_C = m_c \times \begin{Bmatrix} 5a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5m_c a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \cancel{\vec{K}_C} + \vec{\omega C} \times \vec{Q}_C = \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5m_c a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25m_c a^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é massa concentrada

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \therefore$$

$$\vec{v}_A \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}_C^A\right) + \vec{v}_B \times \left(\vec{F}_K^B + \vec{F}_C^B\right) + \vec{\omega C} \times m_c\vec{g} + \vec{M}(t) = \vec{K}_O \quad (=)$$

$$(=) \begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Ka\theta + 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -K6a\theta - 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ m_c g \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25m_c a^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=)\ -36Ka^2\theta - 36ca^2\dot{\theta} - 36Ka^2\theta - 36ca^2\dot{\theta} + 5a\,m_c g\,\theta + M(t) =$$

$$= 25\,m_c a^2\,\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=)\ 25\,m_c a^2\,\ddot{\theta} + \left(72Ka^2 - 5a\,m_c g\right)\theta + 72ca^2\,\dot{\theta} = M(t)$$

Temos então:

$$\underbrace{25\,m_c a^2}_{m_{eq}}\,\ddot{\theta}(t) + \underbrace{72ca^2}_{c_{eq}}\,\dot{\theta}(t) + \underbrace{\left(72Ka^2 - 5a\,m_c g\right)}_{k_{eq}}\theta(t) = M(t)$$

b) Frequência angular natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{72\times 200\times 0{,}04^2 - 5\times 0{,}04\times 3\times 9{,}8}{25\times 3\times 0{,}04^2}} = 11{,}958261 \ \text{rad/s}$$

c) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N}\ln\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{1}\ln\frac{\frac{9{,}9\times\pi}{180}}{\frac{4{,}9\times\pi}{180}} = \ln\frac{9{,}9}{4{,}9} = 0{,}703300$$

Rateio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}703300}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}703300^2}} = 0{,}111239$$

Constante c de cada amortecedor:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} \quad \therefore \quad 0{,}111239 = \frac{72\times c\times 0{,}04^2}{2\times 25\times 0{,}04^2\times 3\times 11{,}958261} \quad (=) \quad c = 2{,}771302 \ \text{Ns/m}$$

d) Frequência angular amortecida:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 11{,}958261\sqrt{1-0{,}111239^2} \quad (=) \quad \omega_d = 11{,}884044 \ \text{rad/s}$$

Como estamos perante um sistema sub-amortecido, $0<\zeta<1$, então sabemos que os instantes em que o sistema passa pela posição de equilíbrio são dados por:

$$t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \phi\right), \quad n = 1, \ldots$$

Tendo em conta as condições iniciais de $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s, temos:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\theta_0} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{10+0}{0} \quad (=) \quad \phi = \pm 1{,}570796$$

O instante em que o sistema passa pela primeira vez na posição de equilíbrio é dado por:

$$t\Big|_{\theta(t)=0 \;\wedge\; n=1} = \frac{1}{11{,}884044}\left(\frac{2\times 1 - 1}{2}\times\pi + 1{,}570796\right) = 0{,}264354 \text{ s}$$

e) Quando o sistema atinge novamente a posição de equilíbrio estático, significa que dissipou toda a energia que possuía inicialmente.

Energia no instante $t = 0$ s:

$$E(0) = E_c(0) + E_p(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\times m_{eq}\times\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\times K_{eq}\times \cancel{\theta_0^2}^{\,=0} =$$

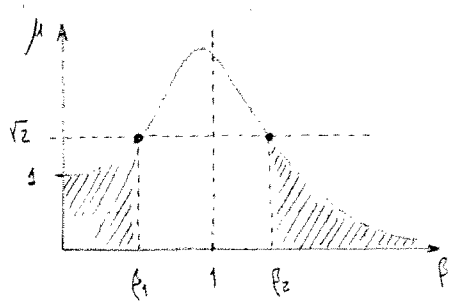
$$= \frac{1}{2}\times 25\times m\times a^2\times\dot{\theta}_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\times 25\times 3\times 0{,}04^2\times\left(\frac{10\times\pi}{180}\right)^2 =$$

$$= 0{,}001828 \text{ J}$$

f) Pretendemos saber quais as frequências ω que asseguram que μ seja inferior a $\sqrt{2}$.

Graficamente:



$$\mu < \sqrt{2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} < \sqrt{2}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Então:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\times 0{,}111239\times\beta)^2}} = \sqrt{2} \quad (=) \quad \beta_1 = 0{,}550999 \;\wedge\; \beta_2 = 1{,}281317$$

As frequências ω_1 e ω_2 são:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} \therefore 0,550999 = \frac{\omega_1}{11,958261} \Leftrightarrow \omega_1 = 6,58899 \ rad/s$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n} \therefore 1,282317 = \frac{\omega_2}{11,958261} \Leftrightarrow \omega_2 = 15,34624 \ rad/s$$

Finalmente, as frequências que asseguram que $\mu < \sqrt{2}$ são:

$$\omega < 6,58899 \ rad/s \quad \wedge \quad \omega > 15,34624 \ rad/s$$

Exame de Recurso de 08-01-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$

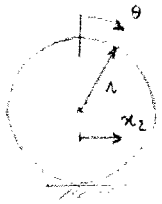
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times 3m \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m \times (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \ell^2\right) \frac{\dot{x}_2^2}{\ell^2} =$

$= \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}_2^2 =$

$= 2m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2$



$x_2 = \ell \sin\theta$

$\dot{x}_2 = \ell \dot{\theta}$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times K \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times 2K \times (x_2 + x_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \times 3K \times (x_1 - x_1 - x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} K x_1^2 + K x_2^2 + \frac{3}{2} K x_2^2 =$

$= \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{5}{2} K x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f_1(t)\,\delta x_1 + f_2(t)\,\delta x_2$

$Q_1 = f_1(t) \frac{dx_1}{dx_1} + f_2(t) \frac{dx_2}{dx_1} = f_1(t)$

$Q_2 = f_1(t) \frac{dx_1}{dx_2} + f_2(t) \frac{dx_2}{dx_2} = f_2(t)$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 4m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2} m \ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 5Kx_2$

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_1 = f_1(t) \\ m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + 5Kx_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 4m & m \\ m & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 5K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

b) A equação do movimento é:

$$\begin{bmatrix} 5/2\,m & -1/2\,m \\ -1/2\,m & 3/2\,m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Sabemos que:

$$f(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) = F\cos\omega t \\ f_2(t) = 0 \end{Bmatrix}$$

Exame de Prova de Recurso de 09-07-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento : ℓ
Simplesmente apoiada
Rigidez da mola : k
Área da secção recta : A
Momento de 2ª ordem : I
Módulo de elasticidade : E
Massa volúmica : ρ

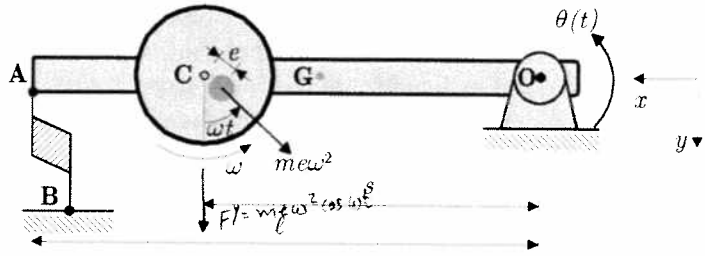
a) Condições de fronteira de um veio simplesmente apoiado, para um problema de flexão:

$$V(0) = 0$$

$$V(\ell) = 0$$

$$EI \left.\frac{d^2}{dx^2} V(x)\right|_{x=0} = 0$$

$$EI \left.\frac{d^2}{dx^2} V(x)\right|_{x=\ell} =$$



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma viga de massa M, articulada em **O** e apoiada em **A** sobre um suporte que funciona como um conjunto mola-amortecedor. No ponto **C**, está montado um disco excêntrico de massa m que roda com uma velocidade angular constante ω e cujo centro de massa está descentrado dum valor e do eixo de rotação, originando uma força centrífuga (rotativa) de valor $me\omega^2$. Admitindo que em repouso a viga se encontra na horizontal e, a partir dessa posição de referência, efectua pequenas oscilações $\theta(t)$, determinar:

a) (25%) a equação diferencial de movimento;

Aplicação numérica:

$\ell = 600$ mm $\quad s = 440$ mm $\quad M = 4.296$ kg

$m = 1.6$ kg $\quad me = 1 \times 10^{-3}$ kgm

Num ensaio em regime livre, registou-se a resposta representada e anotada na figura.

Determinar:

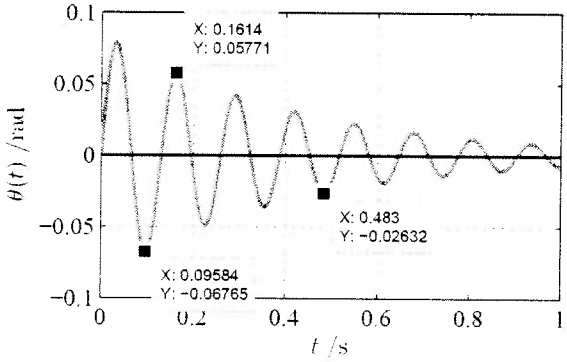
b) (15%) a razão de amortecimento ξ;

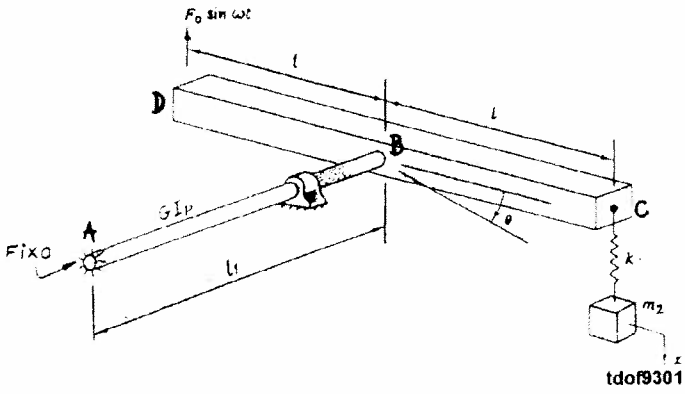
c) (15%) a constante c de amortecimento do suporte;

d) (15%) a constante k de rigidez do suporte;

e) (15%) a amplitude de aceleração (linear) do centro de massa **G** da viga para $\omega = 930$ rpm;

f) (15%) a amplitude da força máxima transmitida ao suporte;





2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em **A** e ligado em **B** a uma barra rígida de massa m_1. Na extremidade **C** da barra está ligada uma mola de rigidez k a qual se encontra ligada a uma massa concentrada m_2. Na extremidade **D** da barra está aplicada uma solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas $\theta(t)$ e $x(t)$ e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) (25%) Escrever, literalmente, as equações de movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$m_1 = m_2 = 3m$ $\quad \ell_1 = \ell = 1$ m $\quad k = 160$ N•m^{-1} $\quad GI_p = 80$ N•m^2

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração. Comentar as formas naturais de vibração.

c) (15%) Escrever as equações do movimento na base modal;

d) (20%) Para a solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$, determinar a amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$ para $m = 2$ kg e $\omega = 8$ rad•s^{-1}. Comentar o resultado. Esboçar graficamente a variação das amplitudes de resposta em função da frequência.

e) (20%) Redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad•s^{-1}.

3) (4 val.) A figura a) representa um veio em aço de comprimento $\ell = 0.75$ m e simplesmente apoiado. O material do veio (aço) apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 125 Hz;

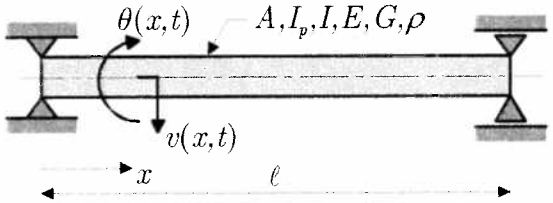
b) (15%) Determinar a frequência fundamental de torção do veio;

A figura b) representa o veio com um pinhão de massa $m = 1.37$ kg e momento de inércia $J_{xx} = 5.516 \times 10^{-4}$ kgm^2 montado em $\ell / 2$. O momento de inércia diametral do pinhão é desprezável.

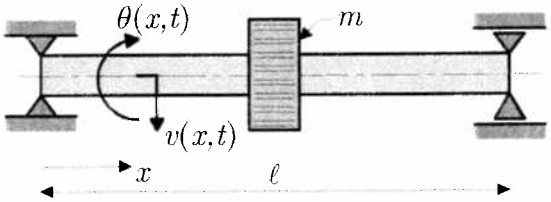
c) (30%) Determinar (estimar) as 2 primeiras frequências naturais de flexão. Comentar o resultado.

d) (10%) Determinar a frequência fundamental de torção do sistema (veio+pinhão).

e) (15%) Escrever as condições de fronteira para a torção do sistema (veio+pinhão).



a)



b)

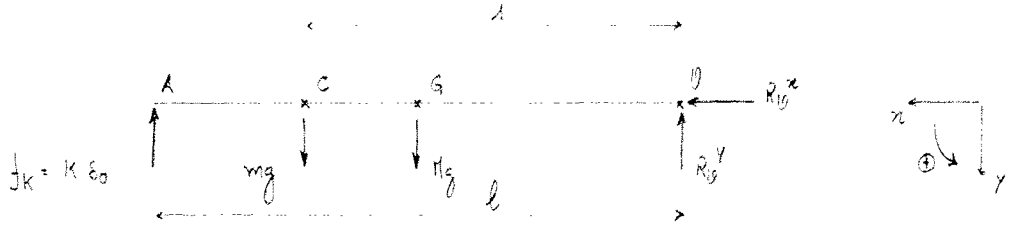
NOTA: Secção circular: $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$.

FEUP, 26 de Setembro de 2011
José Dias Rodrigues

Exame de Conclusão de Curso de 26-09-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

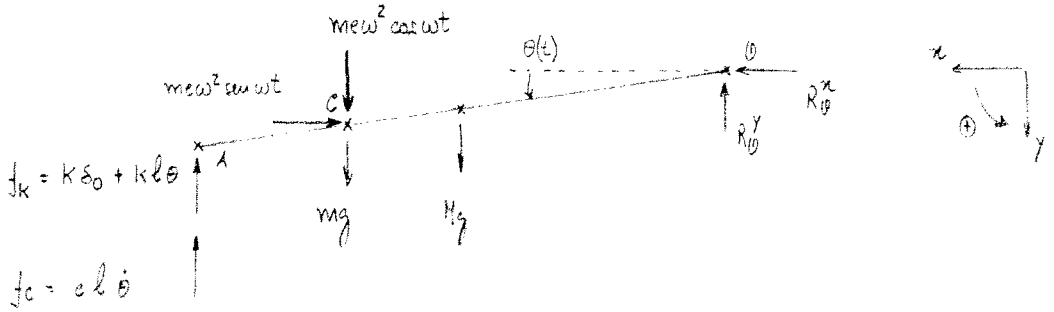
Na posição de equilíbrio estático:



$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \therefore \quad -lK\delta_0 + \tfrac{l}{2}mg + \tfrac{l}{2}Hg = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad Kl\delta_0 = \left(\tfrac{1}{2}m + \tfrac{l}{2}H\right)g$$

Quando perturbamos o sistema:



a) Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{M}_O = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore -l\cos\theta \times \left(cl\dot{\theta} + K\delta_0 + Kl\theta\right) + \tfrac{1}{2}\cos\theta \times \left(me\omega^2\cos\omega t + mg\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\, me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t + \tfrac{l}{2}\cos\theta \times Hg = J_O\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -cl^2\dot{\theta} - \cancel{Kl\delta_0} - Kl^2\theta + \tfrac{1}{2}me\omega^2\cos\omega t + \cancel{\tfrac{1}{2}mg} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\theta\, me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t}_{\text{despreável}} +$$

$$+ \tfrac{l}{2}Hg = J_O\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J_O\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + Kl^2\theta = \tfrac{1}{2}me\omega^2\cos\omega t$$

Onde :

$$J_O = J_O^{barra} + J_O^{disco} =$$

$$= \frac{1}{12} \times m_b \times l^2 + m_b \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times m_d \times r^2 + m_d \times s^2 =$$

$$= \frac{1}{3} m_b l^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_d r^2 + m_d s^2}$$

A inércia do disco é desprezada, pois o valor de r é desconhecido.

b) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{3} \ln \frac{-0,06765}{-0,02632} = 0,314673$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,314673}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,314673^2}} = 0,050019$$

c) Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0,483 - 0,09584}{3} = 0,129053 \text{ s}$$

Frequência natural amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0,129053} = 48,686860 \text{ rad/s}$$

Frequência natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{48,686860}{\sqrt{1 - 0,050019^2}} = 48,747879 \text{ rad/s}$$

Constante de amortecimento e do suporte:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c \cancel{l^2}}{2 \times \frac{1}{3} \times m_b \times \cancel{l^2} \times \omega_n} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 0{,}050019 = \frac{c}{2 \times \frac{1}{3} \times 4{,}296 \times 48{,}747879} \quad \Leftrightarrow \quad c = 6{,}983349 \ N/s/m$$

d) Constante de rigidez k do suporte:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k\,\ell^2}{\frac{1}{3} \times m_b \times \ell^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 48{,}747879 = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{3} \times 4{,}296}} \quad \Leftrightarrow \quad k = 3402{,}941372 \ N/m$$

e) Frequência, ω:

$$\omega = 930 \ rpm \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{930}{60} \times 2\pi = 97{,}389372 \ rad/s$$

Resposta em deslocamento do sistema, $\theta(t)$

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Velocidade de resposta do sistema, $\dot{\theta}(t)$

$$\dot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\, \omega\, \text{sen}(\omega t - \phi)$$

Aceleração de resposta do sistema, $\ddot{\theta}(t)$

$$\ddot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\, \omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

A amplitude de resposta é:

$$\Theta(\omega) = \mu \times \Theta_s = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \qquad \text{(equação 3)}$$

Onde o deslocamento estático Θ_s é:

$$\Theta_s(\omega) = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = \frac{\lambda\, m_e\, e\, \omega^2}{k\,\ell^2} = \frac{0{,}44 \times 1 \times 10^{-3} \times 97{,}389372^2}{3402{,}941372 \times 0{,}6^2} = 0{,}003407$$

E a razão de frequências é:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{97{,}389372}{48{,}747879} = 1{,}997818$$

Voltando à equação 1, a amplitude de resposta é:

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \times \Theta_s =$$

$$= \frac{1}{\left[(1 - 1{,}997818^2)^2 + (2 \times 0{,}050019 \times 1{,}997818)^2\right]^{1/2}} \times 0{,}002407 =$$

$$= 0{,}005699 \text{ rad}$$

Amplitude de aceleração:

$$\ddot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\,\omega^2 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= -0{,}005699 \times 97{,}389372^2 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \underbrace{-54{,}053247}_{\text{Amplitude}} \times \cos(\omega t - \phi)$$

$\ddot{\Theta}(\omega)$

No ponto G, a amplitude de aceleração é:

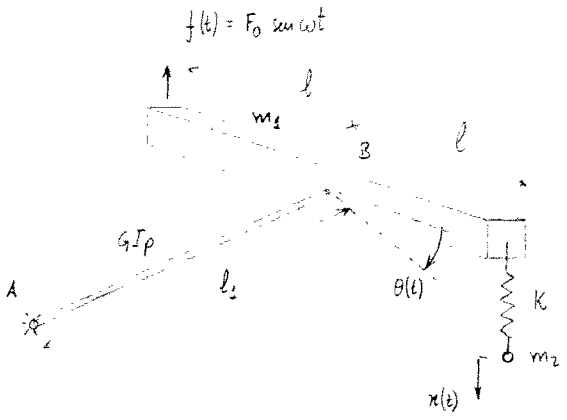
$$\ddot{\Theta}_G(\omega) = \frac{l}{2} \times \ddot{\Theta}(\omega) = \frac{0{,}6}{2} \times (-54{,}053247) = -16{,}215974 \text{ m/s}^2$$

f)

Exame de Conclusão de Curso de 26-09-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

Quando perturbamos o sistema temos:



Rigidez do veio: $K_t = \frac{G I_p}{l_1}$

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = \theta(t)$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}(t)$
$q_2 = x(t)$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}(t)$

Energia cinética: $E_c = \frac{1}{2} \times \overset{\text{barra}}{I_B} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times m_1 \times (2l)^2 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 =$

$= \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

Energia potencial: $E_p = \frac{1}{2} \times k_t \times \theta^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x - l\theta)^2$

Forças não conservativas: $Q_1 = f(t) \times l \times \cos\theta \ \frac{d\theta}{d\theta} + 0 = l\, f(t)$

$Q_2 = f(t) \times l \times \cos\theta \ \frac{d\theta}{dx} + 0 = 0$

Equações de Lagrange:

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\theta}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta}$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_t \theta + k(x - l\theta) \times (-l) =$

$= K_t \theta + Kl(l\theta - x)$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = K(x - \ell\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_2 \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Temos então:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \ddot{\theta} + K_t \theta + K\ell(\ell\theta - x) = \ell f(t) \\ m_2 \ddot{x} + K(x - \ell\theta) = 0 \end{cases}$$

Que na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 \ell^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t + K\ell^2 & -K\ell \\ -K\ell & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Com os valores numéricos dados temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 3m \times 1 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{1} + 160 \times 1^2 & -160 \times 1 \\ -160 \times 1 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} 240 - \omega^2 m & -160 \\ -160 & 160 - \omega^2 \times 3m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3.917724}{\sqrt{m}} \quad \wedge \quad \omega_2 = \frac{16.672875}{\sqrt{m}}$$

Formas naturais de vibração:

$$K_{21} u_1 + (K_{22} - \omega^2 m_2) u_2 = 0 \quad \therefore \quad -160 u_1 + (160 - \omega^2 \times 3m) u_2 = 0$$

1ª forma natural:

$$-160\,u_1 + \left(160 - \frac{3{,}717724^2}{m} \times 3m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = 1{,}404071\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural:

$$-160\,u_1 + \left(160 - \frac{16{,}672835^2}{m} \times 3m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = -0{,}237405\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}$$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}380301/\sqrt{m} \\ 0{,}533940/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0{,}924863/\sqrt{m} \\ -0{,}219567/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

Equações do movimento na base modal:

$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3{,}717724^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{16{,}672835^2}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}380301/\sqrt{m} & 0{,}924863/\sqrt{m} \\ 0{,}533940/\sqrt{m} & -0{,}219567/\sqrt{m} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3,917724^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{16,672875^2}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,380301/\sqrt{m} & \hat{f}(t) \\ 0,924863/\sqrt{m} & \hat{f}(t) \end{Bmatrix}$$

d)

Exame de Conclusão de Curso de 26/09/2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento : $\ell = 0{,}75$ m
Simplesmente apoiado : Flexão → $\beta_1 \ell = \pi$
Módulo de elasticidade longitudinal : $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal : $G = 80$ GPa
Massa volúmica : $\rho = 7800$ kg/m^3
Secção recta circular

a) Diâmetro do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 125 Hz :

$$f_1 = 125 \quad (=)$$

$$(=) \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E I}{\rho A \ell^4}} = 125 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \times 0{,}75^4}} = 125 \quad (=)$$

$$(=) \quad d = 0{,}034507 \text{ m}$$

Então, o diâmetro mínimo do veio para que se verifique as condições do enunciado é de $d = 0{,}034507$ m, logo, $d > 0{,}034507$ m.

b) Para a torção, um veio simplesmente apoiado apresenta-se com as extremidades livres à torção.

Então, a frequência natural fundamental de torção é dada por :

$$\omega_1 = 1 \times \frac{\pi}{\ell} \times \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \therefore$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{\pi}{0{,}75} \times \sqrt{\frac{80 \times 10^9}{7800}} \quad (=) \quad \omega_1 = 13{,}4149 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

c) Temos agora um pinhão, a meio do veio, com $m = 1.37$ kg e $J_{xx} = 5{,}516 \times 10^{-4}$ kg m^2.

Para a frequência natural fundamental de flexão, temos :

$n = 1$



Função de aproximação: $v(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Derivável 2 vezes: $\frac{d}{dx} v(x) = \delta \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = -\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Verificar as condições de fronteira: $v(0) = 0$

$v(\ell) = 0$

Método da energia de Rayleigh:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^\ell E\,I(x)\left[\frac{d^2}{dx^2} v(x)\right]^2 dx + V_{efn} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell E\,I(x)\left[-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + 0 =$$

$$= \frac{EI}{2} \frac{\delta^2 \pi^4}{2\ell^3}$$

$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A(x)\left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{efn} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \times \left[\delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \left[v(\ell/2)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \frac{\delta^2 \ell}{2} + \frac{1}{2} m \delta^2$$

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{T^*} = \frac{\frac{EI \delta^2 \pi^4}{4\ell^3}}{\frac{1}{4}\rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} m \delta^2} = \frac{EI\pi^4}{(A \times \ell \times \rho + 2xm)\ell^3}$$

Então: $I = \frac{d^4 \times \pi}{64} = 69{,}542 \times 10^{-9}\ m^4$; $A = \pi \times \frac{d^2}{4} = 934{,}820164 \times 10^{-6}\ m^2$

$$\omega_1 = \left[\frac{210 \times 10^9 \times 69{,}542 \times 10^{-9} \times \pi^4}{(934{,}820164 \times 10^{-6} \times 0{,}75 \times 7800 + 2 \times 1{,}37) \times 0{,}75^3}\right]^{1/2} =$$

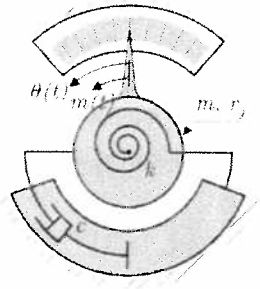
$$= 640{,}92\ rad/s$$

Para a 2ª frequência natural temos:

$n = 2$



$$\omega_2 = (\beta_2 \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \quad \therefore \quad \omega_2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 69{,}542 \times 10^{-9}}{7800 \times 934{,}820164 \times 10^{-6} \times 0{,}75^4}} = 3140{,}936154\ rad/s$$



1) (4 val.) O rotor de um instrumento de medição é controlado por uma mola de torção de rigidez k e um amortecedor viscoso de rotação de constante c, conforme representado na figura. A massa do rotor é $m = 50 \times 10^{-3}$ kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é $r_g = 10$ mm (NOTA: $r_g^2 = J / m$).

A oscilação do rotor é descrita pelo parâmetro $\theta(t)$ referenciado à posição de equilíbrio estático.

Quando perturbado, o rotor realiza uma oscilação completa em 3.25 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de $15 / 3$.

Determinar:

a) (15%) a razão de amortecimento ξ;

b) (15%) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

c) (15%) a constante de rigidez k da mola de torção e a constante de amortecimento viscoso c do amortecedor (de rotação).

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 15 °, determinar:

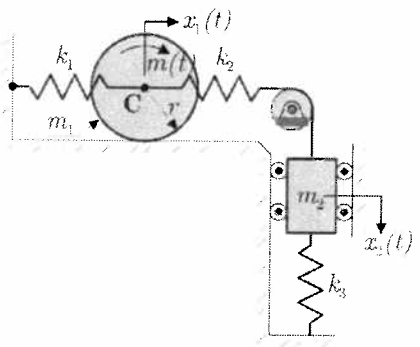
d) (10%) o tempo que demorou a rodar 15 °;

e) (15%) a energia fornecida pelo impulso.

Se ao rotor for aplicado um momento $m(t) = M_0 \cos \omega t$, determinar,

f) (15%) a frequência de excitação ω para a qual ocorre a resposta máxima e o respectivo valor de resposta;

g) (15%) a(s) gama(s) de frequências para a(s) qual(is) o momento transmitido pela mola é inferior a $1.5M_0$.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de raio r e massa m_1 que rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O cilindro está ligado ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por uma mola de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_3.

No eixo do cilindro está aplicada uma solicitação $m(t)$. O movimento do sistema, a partir da posição de equilíbrio estático, é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores seguintes:

$m_1 = 3m, \quad m_2 = m, \quad r = 0.1\,\text{m}, \quad k_1 = 3k, \quad k_2 = k, \quad k_3 = k,$

b) (10%) estabelecer a equação característica polinomial;

c) (10%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração;

d) (10%) Exprimir as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias;

Para $m = 5$ kg e $k = 8000$ N/m,

e) (15%) Determinar o valor máximo da resposta $x_2(t)$ devido a um momento harmónico de amplitude M_0 e de frequência $\omega = 43$ rad/s e escrever a expressão da resposta $x_2(t)$.

f) (10%) Redimensionar k_3 de modo que a massa m_2 funcione como um absorsor de vibrações.

g) (15%) Para condições iniciais nulas, e utilizando a análise modal truncada, determinar a resposta $x_2(t)$ provocada pela excitação $m(t) = \begin{cases} M_0 & 0 \le t \le 0.053 \text{ s} \\ 0 & t > 0.053 \text{ s} \end{cases}$

3) (4 val.) A figura a) representa um veio em aço de comprimento $\ell = 1.25$ m e simplesmente apoiado. O material do veio (aço) apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (25%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 75 Hz;

Para rigidificar a montagem, montou-se um apoio elástico de rigidez k em $\ell/2$, conforme representado na figura b).

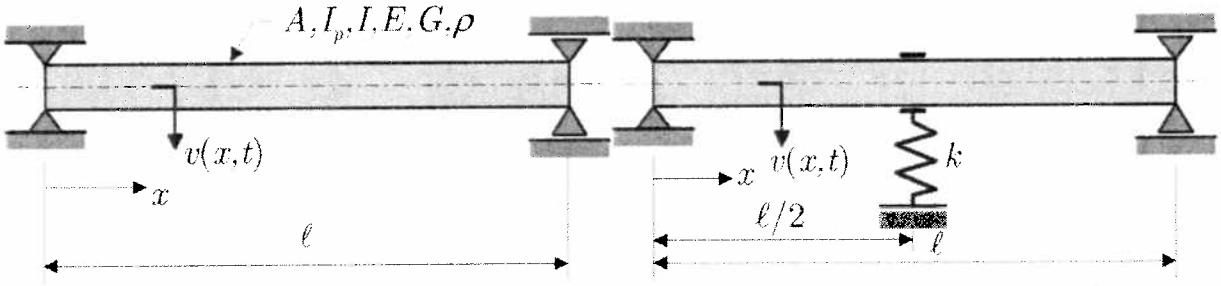
Aplicando o método da energia de Rayleigh,

b) (10%) Estabelecer, justificando, uma função de aproximação $V(x)$ adequada;

c) (30%) Determinar e caracterizar uma estimativa ω_1^R da frequência natural fundamental. Apresentar o resultado para $k = \alpha \dfrac{EI}{\ell}$ onde α representa um escalar.

d) (15%) Indicar o valor da frequência natural fundamental exacta para o valor limite $k \to \infty$;

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo método de Rayleigh, com a função $V(x)$ utilizada, para os valores limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.



a) b)

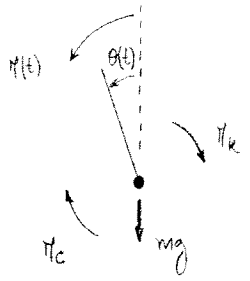
NOTA: Secção circular: $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$.

FEUP, 31 de Outubro de 2011
José Dias Rodrigues

Exame de Trabalhador-Estudante de 31-10-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Perturbando o sistema, temos:



E com os dados iniciais temos:

$m = 50 \times 10^{-3}$ Kg

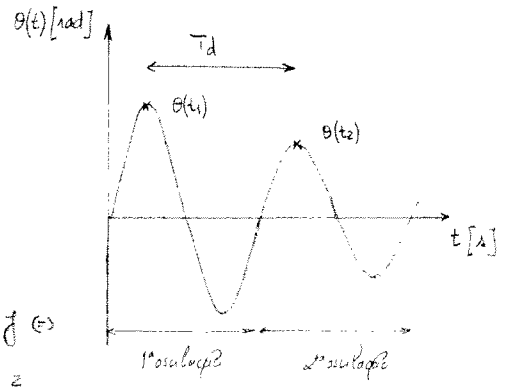
$r_g = 10$ mm

$T_d = 3{,}25$ s

$\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} = \frac{15}{3}$

$r_0^2 = \frac{J}{m} \therefore 0{,}01^2 \times 50 \times 10^{-3} = J \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J = 5 \times 10^{-6}$ Kg m^2



a) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \therefore \delta = \frac{1}{1} \ln \frac{15}{3} \Leftrightarrow \delta = 1{,}609438$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \therefore \zeta = \frac{1{,}609438}{\sqrt{4\pi^2 + 1{,}609438^2}} \Leftrightarrow \zeta = 0{,}248139$$

b) Frequência natural amortecida, ω_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \therefore \omega_d = \frac{2\pi}{3{,}25} \Leftrightarrow \omega_d = 1{,}932288 \text{ rad/s}$$

Frequência natural angular não amortecida, ω_n:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1-\zeta^2} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \therefore \omega_n = \frac{1,933288}{\sqrt{1-0,248139^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 1,995705 \text{ rad/s}$$

c) Equação diferencial do movimento:

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = m(t)$$

Constante de rigidez K da mola:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}} \therefore 1,995705 = \sqrt{\frac{K_t}{5\times10^{-6}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_t = 1,991419 \times 10^{-5} \text{ N/m}$$

Constante de amortecimento viscoso, c:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n} \therefore 0,248139 = \frac{c}{2 \times 5\times10^{-6} \times 1,995705} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 4,952122 \times 10^{-6}$$

d) Um impulso é equivalente a dar ao sistema uma velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ não nula e um deslocamento inicial nulo.
A resposta livre ou natural do sistema sub-amortecido é:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Para a resposta máxima de 15° está associada uma velocidade nula $\dot{\theta}=0$ e o instante em que ela máximo é atingido é dado por:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n+1)\pi + \phi\right] \wedge n=1 \therefore$$

$$\therefore t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{1,933288}\left[\tan^{-1}\left(\frac{0,248139}{\sqrt{1-0,248139^2}}\right) + 0 + \frac{\pi}{2}\right] \wedge n=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = 0,682794 \text{ s}$$

A constante ϕ é calculada através da expressão:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d \theta_0} \quad (\dot{\theta}_0 = 0) \quad \phi = \tan^{-1} \infty \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

c) Energia no instante inicial, t=0s, é:

$$E(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \dot{\theta}_0^2 \times m_{eq} + \frac{1}{2} \times \theta_0^2 \times K_{eq} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \dot{\theta}_0^2 \times 5 \times 10^{-6} \qquad \text{(equação 1)}$$

Constante A através da equação da resposta natural do sistema:

$$\theta(t) = A \times e^{-\xi \omega_n t} \times \cos(\omega_d t - \phi) \therefore$$

$$\therefore \frac{25 \times \pi}{180} = A \times e^{-0,248139 \times 5,995705 \times 0,682794} \times \cos\left(1,933288 \times 0,682794 - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 0,378979$$

Velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ através da equação de A:

$$A = \left[\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d} \right)^2 + \theta_0^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \left[\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d} \right] = A \therefore$$

$$\therefore 0,378979 = \frac{\dot{\theta}_0}{1,933288} \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = 0,732676 \ rad/s$$

Voltando à equação 1, a energia no instante inicial, isto é, a energia fornecida pelo impulso é:

$$E(t=0) = \frac{1}{2} \times 0,732676 \times 5 \times 10^{-6} \Leftrightarrow E(t=0) = 1,342035 \times 10^{-6} \ J$$

f) A frequência de excitação ω para a qual ocorre a resposta máxima é a frequência de ressonância ω_r dada por:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 1{,}995705 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}248139^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \omega_r = 1{,}868788 \ \text{rad/s}$$

Factor de amplificação máximo:

$$\mu_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{max} = \frac{1}{2 \times 0{,}248139 \times \sqrt{1 - 0{,}248139^2}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mu_{máx} = 2{,}080055$$

Resposta máxima do sistema:

$$H(\omega) = \mu_{máx} \times H_s \quad \therefore \quad H(\omega) = 2{,}080055 \times \frac{H_0}{K_t} \quad (=)$$

$$(=) \quad H(\omega) = 2{,}080055 \times \frac{H_0}{1{,}991419 \times 10^{-5}} \quad (=)$$

$$(=) \quad H(\omega) = 104450{,}896572 \ H_0$$

g)

Exercício 2

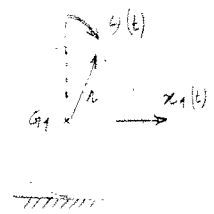
a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1(t)$, $q_2 = x_2(t)$; $\dot{q}_1 = \dot{x}_1(t)$, $\dot{q}_2 = \dot{x}_2(t)$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times J_{G_1} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_1 r^2 \times \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$



$x_1(t) = r\,\theta(t)$

$\dot{x}_1(t) = r\,\dot{\theta}(t)$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (-x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2^2 - 2 x_2 x_1 + x_1^2) + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_2 x_1 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = m(t)\,\delta\theta = m(t)\,\frac{1}{r}\,\delta x_1$

$Q_1 = \frac{m(t)}{r} \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = \frac{m(t)}{r}$ $\qquad Q_2 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2$

Nota: $k_3 x_2^2 = W$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = \frac{m(t)}{r} \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m(t)/r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Para os valores numéricos dados temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \times 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K+K & -K \\ -K & K+K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\,m(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4{,}5m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\,m(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação característica polinomial, no caso da matriz massa ser diagonal:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11})\omega^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 4{,}5m \times m \times \omega^4 - (4{,}5m \times 2K + m \times 4K)\omega^2 + 4K \times 2K - (-K)\times(-K) = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad 4{,}5m^2\omega^4 - (9mK + 4mK)\omega^2 + 8K^2 - K^2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad 4{,}5m^2\omega^4 - 13mK\omega^2 + 7K^2 = 0$$

c) Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \left| \begin{bmatrix} 4K - \omega^2 \times 4{,}5m & -K \\ -K & 2K - \omega^2 \times m \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 0{,}846073\sqrt{\frac{K}{m}} \quad V \quad \omega_2 = 1{,}474126\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Ou resolvendo a equação característica polinomial obtida na alínea b).

Formas naturais de vibração:

$$-K u_1 + \left(2K - 0{,}846073^2 \frac{K}{m} \times m\right) u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad u_2 = 0{,}7787819\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix}$$

$$-K u_1 + \left(2K - 1{,}474126^2 \frac{K}{m} \times m\right) u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad u_2 = -5{,}778761\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5{,}778761 \end{Bmatrix}$$

d) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{\frac{1}{2}}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4{,}5m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}442530/\sqrt{m} \\ 0{,}344606/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\phi\right\}_2 = \frac{1}{\left[\left\{u\right\}_2^T \left[m\right] \left\{u\right\}_2\right]^{1/2}} \left\{u\right\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4,5 & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,162448/\sqrt{m} \\ -0,938748/\sqrt{m}\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

$$\left[I\right]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + \left[\Omega^2\right]\left\{\eta(t)\right\} = \left[\Phi\right]^T \left\{f(t)\right\} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}3,64\,073^2 \frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1,474126^2 \frac{K}{m}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t) \\ \eta_2(t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0,442530/\sqrt{m} & 0,162448/\sqrt{m} \\ 0,344606/\sqrt{m} & -0,938748/\sqrt{m}\end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix}10\,m(t) \\ 0\end{Bmatrix} \quad (=$$

$$(= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0,846073^2 \frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1,474126^2 \frac{K}{m}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t) \\ \eta_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,442530/\sqrt{m} \times 10\,m(t) \\ 0,162448/\sqrt{m} \times 10\,m(t)\end{Bmatrix}$$

e)

Exercício 3

Comprimento : $\ell = 1{,}25$ m
Simplesmente apoiada
Módulo de elasticidade longitudinal : $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal : $G = 80$ GPa
Massa volúmica : $\rho = 7800$ kg/m^3
Secção circular

a) Diâmetro do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 75 Hz :

$$f_1 = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E I}{\rho A \ell^4}} = 75 \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 1{,}25^4}} = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}057512 \text{ m}$$

b) Para um problema de flexão (4ª ordem) a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes (metade da ordem do problema).

$$V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = \frac{\delta \pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = -\frac{\delta \pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

Condições geométricas :

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad V(0) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi \times 0}{\ell} = 0 \qquad \text{Verifica}$$

$$V(x)\Big|_{x=\ell} = 0 \quad \therefore \quad V(\ell) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi \ell}{\ell} = 0 \qquad \text{Verifica}$$

c) Como verificado na alínea anterior, a função de aproximação é admissível.

Então:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} E\,I(x)\left[\frac{d^2}{dx^2}v(x)\right]^2 dx + V_{cfn} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell} E\,I\left[-\frac{\delta\pi^2}{\ell^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + \frac{1}{2}K\times\left[v(\ell/2)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}EI\left[\frac{\delta^2\pi^4}{2\ell^3}\right] + \frac{1}{2}\times K\times\delta^2 =$$

$$= \frac{EI\,\delta^2\pi^4}{4\ell^3} + \frac{\alpha\,EI\,\delta^2}{2\ell}$$

$$T_{máx} = \omega^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho A(x)\left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{cfn}\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho A(x)\left[\delta\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + 0\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\rho A\,\frac{\delta^2\ell}{2}\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{\rho A\delta^2\ell}{4}\right]$$

$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{\rho A\delta^2\ell}{4}$$

$$\omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} = \frac{\frac{EI\,\delta^2\pi^4}{4\ell^3} + \frac{\alpha\,EI\,\delta^2}{2\ell}}{\frac{\rho A\delta^2\ell}{4}} = \frac{EI\pi^4}{\ell^4\rho A} + \frac{2\alpha\,EI}{\rho A\ell}$$

Então:

$$\omega = \left[\frac{EI\pi^4}{\ell^4\rho A} + \frac{2\alpha\,EI}{\rho A\ell}\right]^{1/2}$$